

Varianti di Weierstrass

VARIANTE 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e **PERIODICA**.

Allora $\max$ e $\min$ esistono per forza.

Dim. Sia T **un** periodo. Per W. classico esiste $\max$ e $\min$ in $[0, T]$.

Claim: gli stessi sono $\max$ e $\min$ ovunque.

Prendiamo un qualunque $x \in \mathbb{R}$. Allora per periodicità esiste $\hat{x} \in [0, T]$ tale che $f(x) = f(\hat{x})$ (è così ovvio che esiste?) e quindi $f(x)$ è compreso tra $\max$ e $\min$ in $[0, T]$.

VARIANTE 2 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Allora esiste per forza

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}.$$

Dim. Consideriamo un valore a caso, tipo $f(0)$.

Dalle definizioni di limite segue che

$$\exists A < 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(0) \quad \forall x \leq A$$

$$\exists B > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(0) \quad \forall x \geq B$$

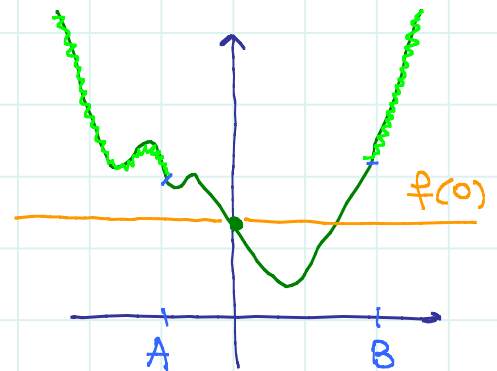
Pongo

$$u := \min \{ f(x) : x \in [A, B] \}$$

e questo esiste per W. classico.

Claim:

$$u = \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$



Basta dim. che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Questo è vero

→ se $x \in [A, B]$ per def. stessa di m

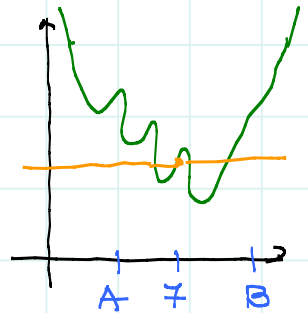
→ se $x \geq B$, allora $f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } B}}{\geq} f(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } 0 \in [A, B] \text{ e } u \text{ è} \\ \text{il min in } [A, B]}}{\geq} m$

→ se $x \in A$, allora $f(x) \geq f(0) \geq m$
 $\quad \quad \quad \uparrow$ def. di A $\quad \quad \quad \uparrow$ come prima
 $\quad \quad \quad \text{---} \quad 0 \quad \text{---} \quad 0 \quad \text{---}$

VARIANTE 3 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste per forza un $\{f(x): x \in (0, \infty)\}$



Inizio dim Considero $f(7)$ e dalle def. di limite ottengo che

$$\exists A \in (0, 7) \text{ t.c. } f(x) \geq f(7) \quad \forall x \in (0, A]$$

$$\exists B > 7 \quad \text{t.c.} \quad f(x) \geq f(7) \quad \forall x \geq B$$

Claim:

$$\min \{f(x) : x \in [A, B]\} = \min \{f(x) : x \in (0, +\infty)\}.$$

— 0 — 0 —

META VARIANTE $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Se esiste un intervallo $[A, B] \subseteq D$ t.c.

$$\sup \{ f(x) : x \in [A, B] \} = \sup \{ f(x) : x \in D \}$$

allora il min in $[A, B]$, che esiste per forza, è anche min in tutto D .

16101

STUDIO LOCALE DI FUNZIONE

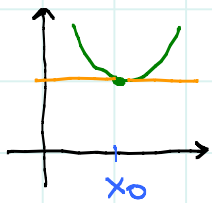
Obiettivo: capire come è fatto il grafico di $f(x)$ vicino ad un p.to x_0 dato.

Monotonia 1 risponde alla domanda quando $f'(x_0) \neq 0$.

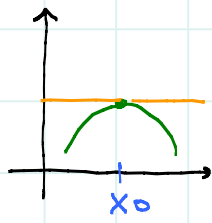
Cosa può succedere quando $f'(x_0) = 0$?

↑ p.ti stazionari

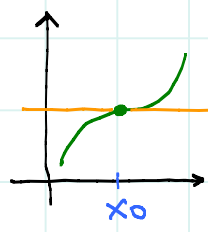
Ci sono 5 possibili scenari (il quinto è nessuno dei precedenti)



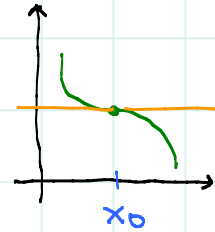
min. loc.



max. loc.



flesso a tang.
orizz. ascendente



flesso a tang.
orizz. disc.

Le definizioni sono

- x_0 p.to di min. locale se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

- x_0 p.to di flesso a tang. orizz. discendente se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Idem gli altri.

CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Supponiamo che

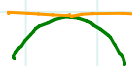
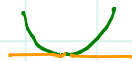
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

e

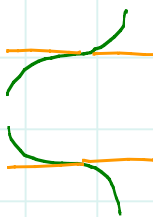
$$f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Allora

k pari $\nearrow f^{(k)}(x_0) > 0$
 $\searrow f^{(k)}(x_0) < 0$



k dispari $\nearrow f^{(k)}(x_0) > 0$
 $\searrow f^{(k)}(x_0) < 0$



Dim TAYLOR !!!

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^k),$$

ma allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Da qui segue tutto. Vediamo un paio di casi.

k pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$

Il limite sopra è negativo, quindi
 $\exists \delta > 0$ t.c. la frazione è negativa
per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

Essendo k pari il denom. è > 0 , quindi num < 0 , cioè

$$f(x_0 + h) < f(x_0) \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \quad \text{no p.to min.}$$

k dispari e $f^{(k)}(x_0) > 0$

Come sopra la frazione è positiva
per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

Per $h \in (0, \delta)$ abbiamo denom > 0 , quindi num. > 0 , quindi $f(x_0 + h) > f(x_0)$

Per $h \in (-\delta, 0)$ " " < 0 " num < 0 , quindi $f(x_0 + h) < f(x_0)$

Quindi flesso ascendente.

MORALE Nell' intorno di un p.to stazionario x_0 si ha che $f(x_0+h) - f(x_0)$ si comporta come il primo termine nello sviluppo di Taylor.

Esempio 1 Sia $f(x) = x^{22} + x'' - \sin(x^2)$.

Vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva / surgettiva.

Inoltre l'eq. $f(x) = 0$ ha almeno 3 radici reali

Due osservazioni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Per W. generalizzato esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

Quindi

→ non assume valori $< m$ no addio sing.

→ assume almeno due volte i valori $> m$ no addio iniettività

Vicino a $x=0$ abbiamo $f(x) = -x^2 + o(x^2)$, quindi l'origine è p.to di max. relativo.

A quel p.to abbiamo intersezioni con l'asse x sia per $x > 0$, sia per $x < 0$.

— 0 — 0 —