

Esercizio 1

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n^4 + 2n^2 - 3}$$

Brutale: $a_n \sim \frac{1}{n}$ quindi si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, cioè diverge

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$. Mi riduco a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0 \neq +\infty$

NOTA BENE: $\frac{1}{n}$ è la parte principale di a_n

Esercizio 2

$$\sum_{n=14}^{\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{converge}$$

Brutale: $a_n \sim \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ $3/2 > 1 \Rightarrow$ converge

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

Esercizio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{a_n}$$

Brutale: $a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} \Rightarrow a_n$ è a termini definitivi ≤ 0 e converge come $\sum \frac{1}{n^3}$

Rigoroso: considero $b_n = \frac{1}{n^3}$. Faccio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$\uparrow$ $x = \frac{1}{n}$ $\uparrow$ Taylor

Questo mi dice che $\frac{a_n}{b_n} < 0$ definitivamente. Essendo $b_n > 0$ questo ci dice che $a_n < 0$ definitivamente. Porto il segno - fuori e concludo con il C.A. con $\frac{1}{n^3}$ ($\frac{1}{6} \neq 0$ e $\neq +\infty$)

Esercizio 4

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)}_{a_n \rightarrow 0^+}$$

Brutale: $a_n \sim n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log n} - 1 \sim \boxed{\frac{\log n}{n}}$ $\nwarrow$ parte principale

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{\log n}{n}$. Faccio $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \neq 0 \neq +\infty$

Quindi si comporta come $\sum \frac{\log n}{n}$ e questa diverge perché

$$\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n} \text{ defiu.} \quad (\text{volendo è l'unica con } a = -1)$$

Esercizio 5

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$$

Definitivamente $\frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^5}$, quindi converge per confronto

Esercizio 6

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$$

Precorso: $2^{\log n} = e^{\log n \cdot \log 2} = (e^{\log n})^{\log 2} = n^{\log 2}$

Più in generale: $\boxed{A^{\log B} = B^{\log A}}$

Quindi $\sum \frac{1}{2^{\log n}} = \sum \frac{1}{n^{\log 2}}$ e diverge perché $\log 2 \in (0, 1)$

(se c'era $3^{\log n}$ convergerebbe)

Esercizio 7

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$$

$\log$ qui è amico, perché $\frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2}$ defiu.

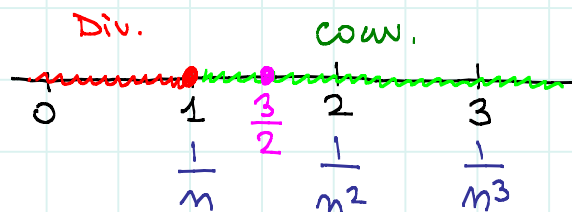
Quindi converge per confronto.

L'ESERCIZIO (#8)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log n)^{7/2}}{n^2}$$

→ esponenti

Ora log è amico!



Domanda: $(\log n)^{7/2}$ sposta $\frac{1}{n^2}$ abbastanza a sx oppure no?

I log sono deboli, quindi prob. no. Come lo dimostro?

Faccio c.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Otengo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{7/2}}{\sqrt{n}} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(potenza batte log)} \\ \uparrow \text{caso limite} \end{array}$$

... quindi $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ defiu... quindi $a_n \leq b_n$...

$\sum b_n$ converge, quindi $\sum a_n$ converge.

(invece di $3/2$ potevo usare un esponente $a \in (1, 2)$)

Fatto generale $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^b}{n^a}$ converge $\forall a > 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$

Oss. L'amica dell'armonica è un leggero spostamento a dx rispetto a $\frac{1}{n}$

Esercizio 9 $\sum_{n=5}^{\infty} \underbrace{[\log(n^4 - 5) - 4 \log n]}_{a_n}$

Brutale: $a_n = \log \left[n^4 \left(1 - \frac{5}{n^4} \right) \right] - 4 \log n$

$$= \log(\cancel{n^4}) + \log \left(1 - \frac{5}{n^4} \right) - \log(\cancel{n^4}) \sim -\frac{5}{n^4}$$

parte principale

↓

Quindi a_n è defn. negativa e (nesso il - fuori) la serie converge per C.A. con $\frac{1}{n^4}$

Esercizio 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{n^{3a} + 5}{n + 7} \right)$

Brutale : $a_n \underset{\substack{\uparrow \\ a > 0}}{\sim} \sin^2 \left(\frac{1}{n^{1-3a}} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ a < \frac{1}{3}}}{\sim} \frac{1}{n^{2-6a}}$

Quindi converge $\Leftrightarrow 2-6a > 1 \Leftrightarrow 6a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{6}$

Oss. La cond. nec. è verificata $\Leftrightarrow 3a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{3}$
— 0 — 0 —