

CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO Siano a_n e b_n due succ.

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ defn.(ii) $b_n > 0$ defn.

(iii) esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0, +\infty) \quad \begin{matrix} l \neq 0 \\ l \neq +\infty \end{matrix}$$

Allora le due serie si comportano allo stesso modo, cioè

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \sum b_n \text{ converge} \quad (\text{il valore della somma può essere diverso})$$

Dim Dall'ipotesi (iii) segue che

$$\frac{l}{4} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 4l \quad \text{definitivamente}$$

Moltiplico per b_n (grazie a (ii)) e ottengo

$$\frac{l}{4} b_n \leq a_n \leq 4l b_n$$

① Se $\sum b_n$ converge, allora $\sum (4l b_n)$ converge, e per la disug. di dx e il confronto, anche $\sum a_n$ converge

② Se $\sum b_n$ diverge, allora $\sum (\frac{l}{4} b_n)$ diverge, e per la disug. sx anche $\sum a_n$ diverge.

— o — o —

Utilizzo operativo Devo studiare $\sum a_n$ e spero di trovare una $\sum b_n$ nota per cui $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0$ e $\neq +\infty$.

CASI LIMITE Ipotesi (i) e (ii) come sopra

① Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$

Allora $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ defiu., cioè $a_n \geq b_n$ defiu., quindi

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

② Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$.

Allora $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ defiu., cioè $a_n \leq b_n$ defiu., quindi

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

— 0 — 0 —

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro

(armonica vera
è con $a=1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

= $\begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$

La sua amica è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}$$

= stessa cosa = $\begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$

Ci sono almeno 3 dimostrazioni

- via condensazione di CAUCHY
- via disuguaglianze AD HOC
- via confronto serie - integrali

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

Sia a_n una successione.

Supponiamo che

(i) $a_n \geq 0$ defn.

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ defn. (debolm. dec.)

(iii) $a_n \rightarrow 0$ (civile)

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

↑
solo termini il cui
indice è una potenza di 2

Applicazione Caso in cui $a_n = \frac{1}{n^a}$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^a}\right)^n \text{ converge}$$

L'ultima è una geometrica che converge $\Leftrightarrow \frac{2}{2^a} < 1$, il che accade se e solo se $a > 1$.

(Posso sostituire 2 con qualunque numero > 1)

Esercizio Provare a fare lo stesso con l'armonica, e generalizzare ad armoniche di ordine superiore.

Dim. condensazione L'idea è questa

$$\begin{array}{l} a_0 | a_1 | a_2 | a_3 a_4 | a_5 a_6 a_7 a_8 | a_9 \dots a_{16} | \dots \leftarrow \text{MIA SERIE} \\ a_0 | a_1 | a_2 | a_4 a_4 | a_8 a_8 a_8 a_8 | a_{16} \dots a_{16} | \leftarrow \text{PIÙ PICCOLA} \\ a_0 | a_1 | a_2 | a_2 a_2 | a_4 a_4 a_4 a_4 | a_8 \dots a_8 | \leftarrow \text{PIÙ GRANDE} \end{array}$$

Da questo segue che

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{2^n} a_k \leq a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k a_{2^k}$$

si dim.
volendo per
induzione

① Se $\sum 2^k a_{2^k}$ converge, guardo a dx e allora $\sum a_k$ converge

② Se $\sum 2^k a_{2^k}$ diverge, guardo a sx e allora $\sum a_k$ diverge.
— o — o —

Alternativa

Fatto 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$ diverge

Faccio confr. asint. con $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log(1 + \frac{1}{n})}_{b_n} \leftarrow$ telescopica e diverge

lim $\frac{a_n}{b_n} = 1$ (solito lim. notevole) $\neq 0$
 $\neq \pm \infty$

Quindi si comportano allo stesso modo.

Subalternativa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_1 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_1 + \frac{1}{8} + \dots$$

Fatto 2 $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$ se $a \leq 1$. Quindi $\sum \frac{1}{n^a}$ con $a < 1$ diverge per confronto.

Fatto 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{b_n}$ converge perché telescopica

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n}$ la posso confrontare asintotico con la precedente.

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$, quindi si comportano allo stesso modo, quindi $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Fatto 4 Visto che $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, allora converge pure

$$\sum \frac{1}{n^a} \text{ con } a \geq 2 \text{ perché } \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{n^2}$$

Resta scoperto il range $a \in (1, 2)$

Esercizio Idea $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ (esercizio per induzione)

Più in generale vale che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$

Dimostrarlo per induzione è quasi un esercizio

Domanda: come farsi venire in mente la stima $\ddot{}$
che implica la conv. per ogni $a > 1$
— o — o —