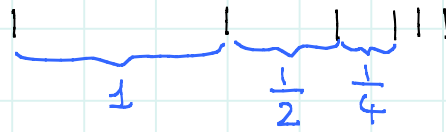


Serie vs Zenone

Il tempo totale è $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ~ geometrica con $a = \frac{1}{2}$

~ converge a $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Come studio una serie senza una formula esplicita per S_n

CONDIZIONE NECESSARIA**SEGNO DEFIN. COSTANTE**

- criterio della radice
- criterio del rapporto
- criterio del confronto
- criterio confronto asintotico
 - * casi standard
 - * casi limite

SEGNO VARIABILE

- LEIBNIZ
- Assoluta convergenza
- DIRICHLET

Condizione necessaria

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$

Dim

Osservo che

$$a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow l - l = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 l l

$\uparrow$
 qui serve che l sia reale

— 0 — 0 —

Oss. * Se a_n NON tende a 0 (cioè tende ad altro oppure non ha limite), allora la serie non può convergere.

Restano aperte 3 possibilità

* Se $a_n \rightarrow 0$, allora la serie può convergere, ma non è obbligata.

Restano aperte 4 possibilità

Prop Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora ci sono solo 2 possibilità per la serie

→ converge

→ diverge a $+\infty$

Dim La succ. S_n delle somme parziali è definitiv. debolm. crescente, quindi per il teo. delle succ. monotone può solo tendere ad $l \in \mathbb{R}$ oppure a $+\infty$.

Esempio
$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^3 + 4n - 1}{2n^3 - 75}}_{a_n} = +\infty$$

Basta osservare che $a_n \geq 0$ definitiv. e $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Perché $a_n \geq 0 \dots$ può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Manca la cond. nec., quindi non può convergere.

CRITERIO CONFRONTO Supponiamo che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente}$$

↑↑

Allora valgono queste implicazioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$$

Dim Siano S_m^a e S_m^b le due somme parziali.

Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ sia vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (posso farlo perché il comportamento non dipende da un numero finito di termini). Allora

$$S_m^a \leq S_m^b \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \xRightarrow{\uparrow \text{def.}} S_m^a \rightarrow +\infty \xRightarrow{\uparrow \text{confronto per i limiti}} S_m^b \rightarrow +\infty \xRightarrow{\uparrow \text{def.}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

(Finora non ho usato il segno costante)

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ conv.} \xRightarrow{\uparrow \text{def.}} S_m^b \rightarrow l \in \mathbb{R} \xRightarrow{\uparrow \text{confronto già sapendo che } S_m^a \text{ ha limite, finito o infinito}} S_m^a \rightarrow l_1 \in \mathbb{R} \xRightarrow{\uparrow \text{def.}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$$

↑ Qui uso che $a_n \geq 0$

CRITERIO DELLA RADICE Supponiamo che $a_n \geq 0$ definit. e $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$.

Allora

- * se $l > 1$ la serie diverge
- * se $l < 1$ la serie converge
- * se $l = 1$, allora BOH.

Dim Se $l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$, quindi addiz. cond. nec. quindi per forza diverge.
Se $l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$, quindi BOH per ora...

Come nella dim. del criterio della radice per i limiti, abbiamo che

$$\begin{array}{c} l \quad \frac{l+1}{2} \quad 1 \\ \hline | \quad | \quad | \end{array}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \text{ defiu. cioè } a_n \leq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{b_n}$$

Osservo che b_n è una geom. con parametro $\in (0,1)$, quindi $\sum b_n$ converge.

Ma allora per confronto anche $\sum a_n$ conv.

CRITERIO RAPPORTO ... $a_n > 0$ defiu. e che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Allora ... stessa conclusione di prima.

Dim Se $l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ e quindi NO COND. NEC.

Se $l < 1$, allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \text{ defiu. ...}$$

$$a_{n+1} \leq \frac{l+1}{2} a_n \text{ defiu.}$$

diciamo per ogni $n \geq n_0$

$$\dots \quad a_n \leq a_{n_0} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} = \underbrace{a_{n_0} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{-n_0}}_{\text{costante}} \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{\text{geometrica con parametro } \in (0,1)}$$

Esercizio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{25}}{2^n}$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^{25}}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow$ la serie converge

Esercizio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{5^n + 6^n} = +\infty$$

$$a_n \sim \frac{7^n}{6^n} = \left(\frac{7}{6}\right)^n \rightarrow +\infty \text{ e quindi manca cond. nec.}$$

Esercizio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n}$$

$a_n \rightarrow e$, quindi niente cond. nec. $\leadsto$ la serie diverge

Esercizio 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \leadsto$ la serie converge

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{n \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1 + o(1)} \rightarrow e^{-1}$$

[Un po' di esercizi veloci nel video]

— o — o —