

SERIE NUMERICHE (come sommare infiniti numeri)

Setting: succ. a_n $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ = somma degli infiniti termini della successione

Def. Si introducono le somme parziali, definite da

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

↑ sommatoria finita

Per definizione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & (\text{la serie converge ad } l) \\ +\infty & (\text{la serie diverge a } +\infty) \\ -\infty & \text{" " " } -\infty \\ \text{N.E.} & (\text{la serie è indeterminata}) \end{cases}$$

Esempi banali

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \quad a_n \equiv 0 \quad S_m \equiv 0 \rightarrow 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty \quad a_n \equiv 1 \quad S_m = \underline{m+1} \quad S_m \rightarrow +\infty$$

occhio che c'è anche a_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad a_n = (-1)^n \quad \text{Le somme parziali sono } 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Quindi $S_m = 1$ se m è pari

$S_m = 0$ se m è dispari

Quindi S_m non ha limite e la serie è indeterminata.

Oss 1 In maniera analoga si definisce $\sum_{n=35}^{+\infty} a_n$

L'unica variante è che $S_m = \sum_{k=35}^m a_k$ definita per $m \geq 35$

Oss 2 Siano a_m e $\hat{a}_m$ due successioni tali che

$$a_m = \hat{a}_m \text{ definitivamente}$$

Allora le due serie corrispondenti hanno lo stesso tipo di comportamento (se convergono, possono convergere a numeri diversi)

Dim Siano S_m e $\hat{S}_m$ le due somme parziali.

Se $a_m = \hat{a}_m$ per ogni $m \geq m_0$, allora esiste una costante M_0 tale che

$$S_m = \hat{S}_m + M_0 \quad \forall m \geq m_0$$

(da m_0 in poi la differenza rimane costante)

Quindi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m \text{ si comporta come } \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{S}_m.$$

— o — o —

Due classi speciali di serie : $\rightarrow$ serie TELESCOPICHE

$\rightarrow$ serie GEOMETRICHE

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

Esperimenti: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

Sembra ragionevole : $S_m = \frac{m}{m+1} \leadsto$ dim. per induzione
 $\leadsto$ la serie converge a 1

Oss. $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}_{a_1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{a_2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{a_3} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}_{a_4} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n$$

$$S_1 = a_1 = \log 2 - \log 1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_2 + a_1 = \log 3 - \log 2 + \log 2 - \log 1$$

$$S_3 = a_3 + a_2 + a_1 = \log 4 - \log 3 + \log 3 - \log 2 + \log 2 - \log 1 = \log 4$$

Sembra ragionevole: $S_n = \log(n+1) \rightsquigarrow$ div. per involuzione
 $\rightsquigarrow$ la serie diverge a $+\infty$.

SERIE GEOMETRICHE $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$

A suo tempo abbiamo visto che

$$S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\text{almeno se } a \neq 1)$$

$a > 1$ $\rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

$a = 1$ $\rightarrow$ è la somma di 1 $\rightsquigarrow$ diverge a $+\infty$

$-1 < a < 1$ $\rightarrow a^{n+1} \rightarrow 0$, quindi la serie converge a $\frac{1}{1-a}$

$a = -1$ $\rightarrow$ la serie è indeterminata ($S_{2n} \rightarrow 1$, $S_{2n+1} \rightarrow 0$)

$a < -1$ $\rightarrow$ la serie è indeterminata ($S_{2n} \rightarrow +\infty$, $S_{2n+1} \rightarrow -\infty$)
 $\uparrow$
 num. $\rightarrow -\infty$ e denum. neg.

Riassunto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \rightarrow \text{converge} & \text{se } -1 < a < 1 \text{ e fa } \frac{1}{1-a} \\ \searrow \text{è indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Oss. Quanto fa $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$?

Pongo $a = 1 + x$ e diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + (n+1)x + o(x) - \cancel{1}}{x} = n+1$$

che è la somma parziale nel caso $a = 1$.

Oss. Telescopiche e geometriche sono quasi le uniche serie per cui è possibile avere una formula esplicita per S_n .

PROPRIETÀ ALGEBRICHE

SOMMA

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{QUASI}$$

PRODOTTO PER COSTANTE

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{SI}$$

PRODOTTO

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$$

NULLA DI FURBO!!

Nemmeno se ho solo due termini
 $a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$

Due somme

Poniamo $c_n = a_n + b_n$. Chiamiamo S_n^a, S_n^b, S_n^c le somme parziali delle 3 serie.

Allora

$$S_m^c = S_m^a + S_m^b \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (\text{inclusione})$$

A questo punto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_m^c = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_m^a + \lim_{n \rightarrow +\infty} S_m^b$$

con tutte le cautele del limite della somma

(va male il $+\infty - \infty$, e ci sono problemi quando i limiti non esistono)

— o — o —