

Def. (Parte principale) Se accade che, per $x \rightarrow 0$,

$$f(x) \sim ax^b$$

o equiv.

$$f(x) = ax^b + o(x^b)$$

se $b > 0$, si dice ordine di infinitesimo

si dice che ax^b è la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Moralmente: la parte principale è "chi comanda"

Esempio 1 $f(x) = \sin x - \arctan x$

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)$$

$$= \boxed{\frac{x^3}{6}} + o(x^3)$$

parte principale

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{e^{x^3} - 1}$

$$\text{Num} = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{Den} = x + x^3 + o(x^3) \rightarrow x = x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \text{raccolgo } x^3 \dots \rightarrow \frac{1}{6}$$

Oss. Sono entrati in gioco i termini cubici di $\sin x$ e $\arctan x$ quindi

→ non si poteva fare con i limiti notevoli

→ con Hôp servivano 3 passaggi.

Esempio 2 bis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{e^{x^3} - 1 + \underbrace{\sqrt{x} \log(1 + x^3 \sqrt{x})}_{o(x^4)}}$

Non è cambiato nulla rispetto a prima ☺

Esempio 3 $(\sin x)^3$ ordine $n = 5$

$$\begin{aligned} (\sin x)^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)^3 \\ &= x^3 + \underbrace{3 \cdot x^2 \left(-\frac{x^3}{6} \right)}_{\substack{\text{unico triplo} \\ \text{prodotto che si salva}}} + o(x^5) = x^3 - \frac{1}{2} x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Esempio 4 $f(x) = (\sin x)^3$. Calcolare $f^{(5)}(0)$.

1° modo: farlo

2° modo: $P_5(x) = \dots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 - \frac{1}{2} x^5$ $\leadsto f^{(5)}(0) = -\frac{1}{2} \cdot 5! = -60$

Esempio 5 (Occhio a questo) $\sin(x+x^3)$ con $n=3$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \dots \quad \sin(x+x^3) = x+x^3 + o(x^3)$$

NO!!! Ho sostituito $x+x^3$ solo alla prima t e non a t^3

$$\begin{aligned} \sin(x+x^3) &= (x+x^3) - \frac{1}{6} (x+x^3)^3 + o(x^3) \\ &= x+x^3 - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{5}{6} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Esempio 6 $f(x) = \cos(\sin x)$ $n=4$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + \underbrace{o((\sin x)^4)}_{o(x^4)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = \dots$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ -\frac{1}{2} \cdot 2(x) \left(-\frac{x^3}{6}\right) \\ \text{Doppio prodotto} \end{array}$$

Esempio 7 $\sin(\cos x)$ $n=3$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$$

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}(\cos x)^3 + o((\cos x)^3)$$

NO!!! Cioè sì, quello che ho scritto è giusto, ma non è vero che $o((\cos x)^3) = o(x^3)$. Posso solo dire che è $o(1)$, ma così serve a poco.

Il problema è che la funzione dentro NON tende a 0.

Esempio 8 $f(x) = e^x$ $n=3$ $x_0 = 2$ $\leftarrow$ p.to staz.

1° modo: calcolo le derivate

2° modo $e^{2+h} = e^2 \cdot e^h = e^2 \cdot \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + o(h^3)\right) = \dots$

Esempio 9 $f(x) = \log x$ $n=3$ $x_0=2$

Non fare cose creative tipo

$$\log x = \log(1+(x-1)) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \dots$$

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \dots$$

No! $x-1$ NON sta tendendo a 0!!!

$$\log(2+h) = \log\left[2\left(1+\frac{h}{2}\right)\right]$$

sta tendendo a 0 ☺

$$= \log 2 + \log\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

$$= \log 2 + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + o(h^3)$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{24}h^3 + o(h^3)$$

Back to esempio 7 $f(x) = \sin(\cos x)$ $n=3$

Devo sviluppare $\sin x$ con $x_0=1$

$$\sin(1+h) = \sin 1 \cdot \cos h + \cos 1 \cdot \sin h$$

$$= \sin 1 \left(1 - \frac{1}{2}h^2\right) + \cos 1 \left(h - \frac{1}{6}h^3\right) + o(h^3)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot h - \frac{1}{2} \sin 1 \cdot h^2 - \frac{1}{6} \cos 1 \cdot h^3 + o(h^3)$$

$$\sin(\cos x) = \sin\left(\underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}_{h \rightarrow 0}\right)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + o(x^3)$$

(Quando calcolo h^2 e h^3 vengono tutti terminati da x^4 in poi)

Oss. Nello sviluppare $\sin(1+h)$ potevo fermarmi al termine in h

Esempio 10 $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ Come si comporta per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &= \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x \sin x} \\ &= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{1}{6}x + o(x) \end{aligned}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x^3}{6} + x^3 \omega_1(x)}{x^2 + x^3 \omega_2(x)} &= \frac{x^3}{x^2} \frac{\frac{1}{6} + \omega_1(x)}{1 + x \omega_2(x)} \\ &= x \frac{\frac{1}{6} + \omega_1(x)}{1 + x \omega_2(x)} \\ &= \frac{1}{6}x + x \underbrace{\left[\frac{\frac{1}{6} + \omega_1(x)}{1 + x \omega_2(x)} - \frac{1}{6} \right]}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Esempio 11 $f(x) = (1 + \sin x)^x$ $n=3$

$$\begin{aligned} (1 + \sin x)^x &= e^{x \log(1 + \sin x)} = e^{x \log\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)} \\ &= e^{x \left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \dots \right]} \\ &= e^{x \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) + \dots} = e^{x^2 - \frac{1}{2}x^3} = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$