

Taylor con centro in un p.to qualunque

Setting: $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$

Allora sotto certe ipotesi esiste un polinomio P_m , di grado $\leq m$, t.c.

$$f(x) = P_m(x - x_0) + o((x - x_0)^m) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

o equivalentemente

$$f(x_0 + h) = P_m(h) + o(h^m) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Condizioni sufficienti affinché avvenga sono che

- f è derivabile $m-1$ volte in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- f è derivabile almeno m volte almeno in x_0

In tal caso il polinomio è dato da

$$P_m(h) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

da cui

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^m)$$

Dim Si deduce da quello con centro $x_0 = 0$ semplicemente considerando $g(h) := f(x_0 + h)$.

Basta osservare che

$$g^{(k)}(h) = f^{(k)}(x_0 + h) \quad (\text{per induzione})$$

Lo sviluppo di $g(h)$ con centro in 0 diventa lo sviluppo di f con centro in x_0 .

— o — o —

OPERAZIONI CON I POLINOMI DI TAYLOR

Per semplicità $x_0 = 0$

SOMMA-DIFFERENZA

$$f(x) = P_m(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q_m(x) + o(x^n)$$

Allora

$$f(x) \pm g(x) = P_m(x) \pm Q_m(x) + o(x^n)$$

Basta sommare e ricordare che $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.

Achtung! $x^4 = o(x)$ $x^3 = o(x)$ ma $x^4 \neq x^3$

PRODOTTO PER UNA COSTANTE

$$\lambda f(x) = \lambda P_m(x) + o(x^n)$$

PRODOTTO DI DUE FUNZIONI

$$f(x) \cdot g(x) = \underbrace{P_m(x) \cdot Q_m(x)} + o(x^n)$$

↑ Nel calcolare il prodotto,
posso limitarmi ai termini
di grado $\leq n$

$$\text{Dim} \quad f(x) \cdot g(x) = [P_m(x) + x^n \omega_1(x)] [Q_m(x) + x^n \omega_2(x)]$$

$$= P_m(x) \cdot Q_m(x) + P_m(x) \cdot x^n \cdot \omega_2(x) \\ + Q_m(x) \cdot x^n \omega_1(x) + x^{2n} \omega_1(x) \omega_2(x)$$

$$= P_m(x) \cdot Q_m(x) + x^n \left\{ P_m(x) \omega_2(x) + Q_m(x) \omega_1(x) \right. \\ \left. + x^n \omega_1(x) \cdot \omega_2(x) \right\}$$

$$\omega_3(x) \rightarrow 0 \quad \ddot{u}$$

Esempio 1 Taylor di ordine 5 di $\sin x \cdot \cos x$

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\end{aligned}$$

volendo posso sommare i termini,

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Caso semplice 1 $f(ax) = P_n(ax) + o(x^n)$

Caso semplice 2 $f(ax^b) = P_n(ax^b) + o(x^{bm}) \quad b > 0$

Dim $f(ax^b) = P_n(ax^b) + (ax^b)^m \omega_1(ax^b)$
 $f(x) = P_n(x) + x^n \omega_1(x)$

$$\begin{aligned}&= P_n(ax^b) + x^{bm} \boxed{a^m \omega_1(ax^b)} \\ &= \omega_3(x) \rightarrow 0 \quad (\text{qui serve } b > 0)\end{aligned}$$

Esempio 2 $\sin(2x)$ con $m=5$ $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^5)$

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2x - \frac{1}{6} \cdot 8x^3 + \frac{1}{120} 32x^5 + o(x^5) \\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5) \quad (\text{deve essere il doppio dell'esempio 1})\end{aligned}$$

↑
posso mettere
 $o(x^6)$

Esempio 3 $\sin(x^3)$ con $m=14$ 1° modo: 14 derivate

2° modo: $\sin(x^3) = x^3 - \frac{1}{6}x^9 + o(x^{14})$
 $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3$ ↑ il termine succ. è x^{15}

COMPOSIZIONE VERA

Se $f(0) = 0$, allora

$$g(f(x)) = Q_m(P_m(x)) + o(x^m)$$

Avrebbe grado m^2 , ma posso limitarmi ai termini di grado $\leq m$

Dimi

$$g(f(x)) = Q_m(f(x)) + (f(x))^m \omega_2(f(x))$$
$$g(y) = Q_m(y) + y^m \omega_2(y)$$

Spero 2 cose:

$$(f(x))^m \omega_2(f(x)) = o(x^m)$$
$$Q_m(f(x)) = Q_m(P_m(x)) + o(x^m)$$

Prima speranza:

$$x \cdot R_m(x) \text{ perché } f(0) = 0$$

$$(f(x))^m \omega_2(f(x)) = [P_m(x) + x^m \omega_1(x)]^m \omega_2(f(x))$$
$$= [x R_m(x) + x^m \omega_1(x)]^m \omega_2(f(x))$$
$$= x^m \underbrace{[R_m(x) + x^{m-1} \omega_1(x)]^m \omega_2(f(x))}_{\omega_3(x) \rightarrow 0}$$

Seconda speranza: è vera e basta dimostrarla usando il binomio di Newton.

$$[f(x)]^k \stackrel{?}{=} [P_m(x)]^k + o(x^m)$$

$$[f(x)]^k = [P_m(x) + x^m \omega_1(x)]^k \rightsquigarrow \text{binomio di Newton}$$

$$= [P_m(x)]^k + x^m \cdot \underbrace{\text{roba}}_{\hookrightarrow 0 \text{ perché ha dentro } \omega_1(x)}$$

$$= [P_m(x)]^k + o(x^m)$$

— 0 — 0 —