

TAYLOR - McLAURIN

Setting : $f(x)$ funzione definita in un intorno di 0

n intero positivo

Problema : trovare un polinomio $P_n(x)$, di grado $\leq n$, tale che

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{o(x^n)}_{\text{Resto di PEANO}} \text{ per } x \rightarrow 0$$

Resto di PEANO

Brutale: voglio approssimare $f(x)$ con un polinomio pagando come resto $o(x^n)$. È inutile considerare gradi $> n$ perché quei termini sarebbero mangiati da o piccolo.

Lemma Se P_n esiste, allora è unico.

Dim Supponiamo ce ne siano due

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$f(x) = \hat{P}_n(x) + o(x^n)$$

Facciamo la differenza:

$$P_n(x) - \hat{P}_n(x) = o(x^n)$$

Supponiamo che $P_n(x) - \hat{P}_n(x)$ non sia il polinomio nullo.

Allora avrà un termine di grado minimo

$$o(x^n) = P_n(x) - \hat{P}_n(x) = a_k x^k + \dots \quad \text{con } 0 \leq k \leq n$$

Divido per x^k e passo al limite per $x \rightarrow 0$. Viene $0 = a_k$ che è assurdo.

Teorema misterioso (Taylor - Peano)

Sia $\delta > 0$ e sia $f: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che

(i) f sia derivabile almeno $n-1$ volte in $(-\delta, \delta)$

(ii) f sia derivabile n volte in $x=0$ (se è derivabile anche altrove, allora meglio)

Allora il P_n esiste ed è dato dalla seguente formula:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$f^{(k)}$ = derivata k -esima di f .

Oss. Il teorema è una condizione SUFFICIENTE ma non necessaria.

Esistono funzioni che hanno $P_4(x)$, e anzi li hanno per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma non hanno nemmeno $f''(0)$.

Oss. Nel caso $n=1$ diventa

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

cioè la def. di differenziale

Nel caso $n=0$ diventa $f(x) = f(0) + o(1)$

cioè la continuità di f in $x=0$.

Oss. Ogni $P_{n+1}(x)$ si ottiene da $P_n(x)$ aggiungendo un termine.

SVILUPPI DI TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (\text{senza fattoriali})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (\text{senza fattoriali})$$

$$(1+x)^a = 1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{a}{1}}}{ax} + \frac{a(a-1)}{2!} \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{a}{2}}} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{a}{3}}} x^3 + \dots$$

(una specie di binomiale con a reale)

Oss. Se f è pari, lo sviluppo ha solo potenze pari
" dispari " dispari

Dim. Basta osservare che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa, e le funzioni dispari fanno 0 in 0.

Esempio $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x - \cos x - \sin x + x^2}{x^2} &= \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + x^2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

Esercizio

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

OK Taylor con $n=3$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

OK Taylor con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$$

NO: manca $\frac{x^5}{120}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$$

OK! (ma BOFFA)
(o piccolo mangia $\frac{x^3}{6}$)

$$\sin x = x - 257x^3 + o(x^2)$$

OK come sopra

VERIFICA SVILUPPI

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \leadsto f^{(k)}(0) = 1 \leadsto \frac{1}{k!} x^k$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f^{(0)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x$$

e così via mod 4

$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

Mettendo $x=0$ trovo $0, 1, 0, -1$, e così via
(0 sui k pari, e ± 1 alternati sui k dispari)

$$f(x) = \cos x$$

Stessa cosa

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Sembra ragionevole che

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

($\leadsto$ facile induzione)

Quindi in $x=0$ $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!$
e quindi il coeff. di x^k è

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$$f(x) = (1+x)^a$$

$$f^{(1)}(x) = a(1+x)^{a-1}$$

$$f^{(2)}(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$

$$f^{(3)}(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$$

e così via.

Casi speciali

$$a = -1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\binom{a}{1} = \frac{-1}{1} = -1, \quad \binom{a}{2} = \frac{-1 \cdot (-2)}{2!} = 1, \quad \binom{a}{3} = \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3)}{3!} = -1$$

Se al posto di x metto $-x$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Se al posto di x metto x^2 :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

→ Da questa deduco le derivate di $\frac{1}{1+x^2}$ calcolate in $x=0$

→ Da quelle deduco le derivate di $\arctan x$ in $x=0$

→ Dalle derivate trovo lo sviluppo di $\arctan x$
— 0 — 0 —