

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL Riguarda limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

con $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ (anche x_0^+ e x_0^-)

Teorema misterioso Consideriamo un limite come sopra.

Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia (dove sono definite f e g , e esistenza delle derivate, possibilità di dividere)

(ii) il limite sia una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ basta su reattori il denum.
cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (gli eventuali segni - si portano fuori)

(iii) esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}} \quad (\text{prime 3 possibilità})$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \leftarrow \text{stesso } l$$

Uso operativo Devo fare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e non sono capace.

Controllo che sia del tipo previsto e provo a fare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

① Se questo esiste in $\bar{\mathbb{R}}$, allora $\therefore$

② Se questo non esiste, allora BOH

③ Se è ancora indet. posso iterare e calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ e così via

Non esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$

NO! Non è una forma indeterminata !!

In realtà non esiste perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty$

Non esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{1} = \text{N.E.}$

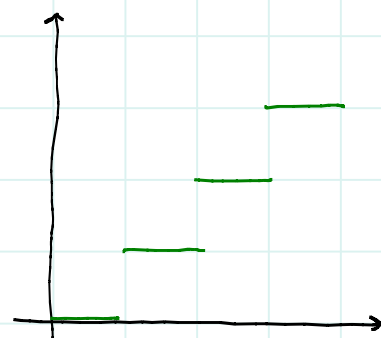
↑
è una forma
indet. $\frac{+\infty}{+\infty}$

NO! Se non esiste il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora BOH

In realtà il limite è uguale a 2 perché

$$\frac{2x-1}{x} \leq \frac{2x + \sin x}{x} \leq \frac{2x+1}{x} \quad \text{e ora carabinieri}$$

Non esempio 3 Sia $f(x)$ la parte intera di x ,
che supponiamo definita in $(0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$.
Osservo che $f'(x) = 0$ in tutti i p.ti in cui
 f è definita. Allora



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = 0$$

$\frac{+\infty}{+\infty}$

D'altra parte $\frac{x-1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x}{x}$ e quindi per i Carabinieri tende a 1.

NO! Se faccio il limite per $x \rightarrow +\infty$, f e g devono essere definite almeno in una semiretta, se lo faccio a 0^+ devono essere definite almeno in $(0, \delta)$ con $\delta > 0$, e così via.

Utilità pratica per il calcolo di limiti : 3%

Le funzioni derivando "peggiorano", quindi uno rischia di trovarsi limiti più complessi.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$ $+\infty \cdot 0$

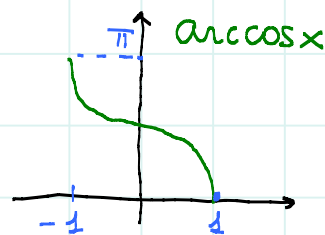
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[0/0] \leadsto \text{H\^op}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Alternativa : Uso che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x > 0$.

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \arctan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arctan y}{y} = 1$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ $0/0 \leadsto \text{H\^op}$



$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} (-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-x+2x-x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}$$

n.B. Questo ci dice che

$$\begin{aligned} \arccos(1-x) &\sim \sqrt{2x} \\ \arccos(1-x) &= \sqrt{2x} + o(\sqrt{x}) \\ &(\text{per } x \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

Alternativa: $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

$y = \arccos(1-x) \quad y \rightarrow 0^+$
 $\cos y = 1-x \quad x = 1 - \cos y$

Diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sqrt{1 - \cos y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{y^2}{1 - \cos y}} = \sqrt{2} \quad \text{e}$$

L'ESEMPIO $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x + x^2}{x^2}$

1° modo: limiti notevoli

$$\frac{e^x - 1 + 1 - \cos x - \sin x + x^2}{x^2} = \frac{x \left(\overset{1}{\frac{e^x - 1}{x}} + \overset{\frac{1}{2} \cdot 0 = 0}{\frac{1 - \cos x}{x^2} x} - \overset{-1}{\frac{\sin x}{x}} \right) + x^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2}{x^2} \rightarrow 1$$

NO! Non si fanno i limiti metà per volta!!!

2° modo: equiv. asintotica

$e^x \sim 1 + x$
 $\sin x \sim x$

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

$$\frac{\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + x^2}{x^2} = \frac{\frac{3}{2} x^2}{x^2} \rightarrow \frac{3}{2} \quad \text{OPS}$$

NO!! Non si usa l'equivalenza asintotica!!

3° modo: De L'Hôpital È del tipo $\frac{0}{0}$, quindi ok

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - \cos x + 2x}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ [\frac{0}{0}] \sim \text{Hôp}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x + \sin x + 2}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2 \quad \text{DOPPIO OPS}$$

Oss. Se uno metteva o piccolo, nel secondo modo se ne accorgeva

$$\frac{e^x - \cos x - \sin x + x^2}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} - o(x) + x^2}{x^2}$$

Quello che resta è $\frac{o(x)}{x^2} = \frac{o(x)}{o(x)}$ quindi BOH

Oss. Posso calcolare limiti tipo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ??$

NO! CIRCULAR REASONING!

Servirebbe che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$, ma per dim. abbiamo usato il limite notevole!