

Strumenti per il calcolo di derivate :

- uso della definizione (con esempi)
- tabellina di derivate funzioni elementari (dim. con definizione)
- teo. algebrici
- Derivata composizione
- Derivata funzione inversa

TEO. ALGEBRICI

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Derivata somma Solito setting per f e g

Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili in x_0 .

Allora la somma $S(x) = f(x) + g(x)$ è derivabile in x_0 e

$$S'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim 1° modo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

2° modo $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$$

Somma:

$$\underbrace{f(x_0+h) + g(x_0+h)}_{S(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{S(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]h}_{S'(x_0)} + o(h)$$

Derivata prodotto ...

Allora il prodotto $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ è deriv. in x_0 e

$$p'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Dim **1° modo**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x_0+h) - p(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

Termine misto! Uno qualunque!

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \underbrace{f(x_0+h)}_{\substack{\downarrow \\ f(x_0) \\ \uparrow}} \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ g'(x_0)}} + g(x_0) \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}} \right\}$$

Qui ho usato la continuità in x_0 .

2° modo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$$

Moltiplico:

$$\begin{aligned} f(x_0+h)g(x_0+h) &= f(x_0)g(x_0) \leftarrow p(x_0) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad p(x_0+h) \\ &\quad + (f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0))h \leftarrow h \cdot p'(x_0) \\ &\quad + o(h) \leftarrow \text{tutti gli altri 6 termini} \\ &\quad \text{finiscono qui} \end{aligned}$$

Derivata del reciproco ...

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e $f(x_0) \neq 0$.

Allora $q(x) = \frac{1}{f(x)}$ è definita in un intorno di x_0 e derivabile in x_0 e vale

$$q'(x_0) = - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

Dim Se $f(x_0) \neq 0$, allora per permanenza del segno $f(x) \neq 0$ almeno in un piccolo intorno di x_0 , quindi $q(x)$ ha senso. A quel p.to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x_0+h) - q(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h}}_{-f'(x_0)} \underbrace{\frac{1}{f(x_0+h)f(x_0)}}_{\frac{1}{f(x_0)^2}}$$

Corollario $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)'$

$$= f' \cdot \frac{1}{g} - f \frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Esempio $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin x) \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Esempio $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = - \frac{n x^{n-1}}{(x^n)^2} = - \frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = - \frac{n}{x^{n+1}}$

FUNZIONE COMPOSTA

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

... saltati un po' di preliminari...

Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e g sia derivabile in $f(x_0)$.

Allora $c(x) = g(f(x))$ è deriv. in x_0 e vale la formula di sopra

Quasi dimostrazione

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x_0+h) - c(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \\ \frac{g(f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \end{array}$$

$\downarrow f'(x_0)$

chiamo k il denominatore e osservo che $k \rightarrow 0$ e la frazione è

$$\frac{g(f(x_0) + k) - g(f(x_0))}{k} \rightarrow g'(f(x_0))$$

Il problema è che c'è una potenziale divisione per 0.

Due vie d'uscita in futuro

→ estensione del rapp. increment.

→ lemma della SOTTO-SOTTO.

FUNZIONE INVERSA

Sia g l'inversa di f .

Allora sotto certe ipotesi

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

NON DIMOSTRAZIONE

$$f(g(x)) = x$$

Derivo:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \rightsquigarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Oss. Anchebbe bene SE sapessi che g è derivabile.

Esempio 1 $g(x) = \log x$ $f(x) = e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x} \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 2 $g(x) = \arctan x$ $f(x) = \tan x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\underbrace{g(x)}_{\arctan x})} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Esempio 3 $g(x) = \arcsin x$ $f(x) = \sin x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lez. sulle funz. trigo inverse}}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Esempio 4 $\cos(x^3) = f(x)$ $f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$
 $\cos^3(x) = f(x)$ $f'(x) = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)$

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \log(\sin x)}$$

$$f'(x) = e^{\cos x \cdot \log(\sin x)} \cdot (\cos x \cdot \log(\sin x))'$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \left\{ -\sin x \cdot \log(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x \right\}$$

Analogamente $(a^x)' = \underbrace{(e^{x \log a})'}_{\text{0}} = \underbrace{a^x}_{\text{0}} \underbrace{\log a}_{\text{0}}$ $(x^a)' = (e^{a \log x})' = a x^{a-1}$