

Sviluppi Limiti notevoli detti con o piccolo (sempre per $x \rightarrow 0$)

$$\sin x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + o(x) \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x - x = o(x) \quad \text{Con la def. quasi equiv.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\cos x - 1 = o(x) \quad \dots \text{quasi equiv.} \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \right)}_{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{0} = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2) \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Oss. Posso usare o piccolo per la succ., ovviamente per $n \rightarrow +\infty$,
cioè $a_n = o(b_n)$ se e solo se $a_n = b_n \cdot \omega_n$
con $\omega_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

LIMITI NOTEVOLI E EQUIVALENZA ASINTOTICA

Per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x & \arctan x &\sim x & \tan x &\sim x & \arcsin x &\sim x \\ \log(1+x) &\sim x & e^x &\sim 1+x & \cos x &\sim 1 - \frac{x^2}{2} & \cos x &\sim 1 \\ (1+x)^a &= 1+ax \end{aligned}$$

$$(1+x)^a = 1+ax+o(x) \quad (\text{include a frazionario o negativo})$$

Devo dim. che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1 - ax}{x} = 0$

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} - a = \frac{e^{a \log(1+x)} - 1}{x} - a$$

$$= \frac{e^{a \log(1+x)} - 1}{a \log(1+x)} \cdot \frac{a \log(1+x)}{x} - a \rightarrow a - a = 0 \quad \because$$

$\downarrow \quad (y = a \log(1+x) \rightarrow 0) \quad \downarrow$

Esercizio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + e^{3x} - \cos x}{\arctan x + \tan^2(x)} = 5$

All'antica: divido sopra e sotto per x e aggiungo e tolgo 1 sopra

$$\frac{\boxed{\frac{\sin(2x)}{x}} + \boxed{\frac{e^{3x}-1}{x}} + \boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{\underbrace{\frac{\arctan x}{x}}_{\downarrow 1} + \underbrace{\frac{\tan^2 x}{x^2}}_{\downarrow 1} \underbrace{x}_{\downarrow 0}} \rightarrow \frac{2+3+\frac{1}{2} \cdot 0}{1+1 \cdot 0} = 5$$

Oggi leuto: sviluppo tutto

$$\sin(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$e^{3x} = 1 + 3x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\tan^2 x = o(x)$$

Sostituisco

$$\begin{aligned} \text{Frazione} &= \frac{2x + 1 + 3x - 1 + o(x)}{x + o(x)} = \frac{5x + o(x)}{x + o(x)} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{uso tante volte} \\ &\quad \text{che } o(x) + o(x) = o(x) \\ &= \frac{5 + \frac{o(x)}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}} \xrightarrow{\substack{\uparrow 0 \\ \downarrow 0}} 5 \end{aligned}$$

Morale: le funzioni strane sono polinomi + spazzatura e la spazzatura è raccolta da o piccolo

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\text{antau}(2x)} - \sqrt[3]{1+x}}{\sin(5x) + \log(1-x)} = \frac{5}{12}$

Brutal mode: $\sin(5x) \sim 5x$ $\log(1-x) \sim -x$
Denominatore $\sim 4x$

$$e^{\text{antau}(2x)} \sim e^{2x} \sim 1 + 2x$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} \sim 1 + \frac{1}{3}x$$

$$\text{Frazione} \sim \frac{1+2x - 1 - \frac{1}{3}x}{5x - x} \sim \frac{\frac{5}{3}x}{4x} \sim \frac{5}{12}$$

Esempio 3 $\sqrt{m^2 + 7m - 4} - m$ Troppo brutale: $\sim m - m = 0$

Occhio: è vero che $\sqrt{m^2 + 7m - 4} \sim m$ (se divido per m tende a 1)

Raccogliamo m^2 dentro la radice:

$$\begin{aligned}
n \left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} - n &= n \left\{ \left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \\
&\quad \begin{matrix} +\infty & \cdot & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ 0\left(\frac{1}{n}\right) \end{matrix} \\
&= n \left\{ \left(1 + \frac{7}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} = n \left\{ \cancel{1} + \frac{1}{2} \frac{7}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1} \right\} \\
&\quad \begin{matrix} \uparrow \\ (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \end{matrix} \\
&= \frac{7}{2} + o(1) \rightarrow \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Oss. $n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) = \underline{o(1)}$
 $\uparrow$ si sommano di "roba che tende a 0"

$$n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) = \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \omega_n$$

$\downarrow$
0

Oss. Le parti principali n si sono semplificate, e in quel caso entrano in gioco le "seconde linee".

$$\sqrt{n^2 + 7n - 4} = n + o(n) \leftarrow \text{questa è vera}$$

$$\sqrt{n^2 + 7n - 4} - n = \cancel{n} + o(n) - \cancel{n} = o(n) = n \cdot \omega_n = \text{BOH}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ 0

Tenendo conto delle seconde linee

$$\sqrt{n^2 + 7n - 4} = n + \frac{7}{2} + o(1)$$