

RAZIONALIZZAZIONI

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+7} - \sqrt{n+4} = 0 \quad [+ \infty - \infty]$

Trucco: razionalizzare. Moltiplico e divido per $\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}$

$$\frac{\cancel{n+7} - \cancel{n+4}}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n+4}} \rightarrow \frac{3}{+\infty} = 0$$

Cosa ho usato: $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (\sqrt{A} - \sqrt{B}) \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

Non pensare nemmeno di fare $\sqrt{n+7} - \sqrt{n+4} \sim \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+7n+4} - n = \frac{7}{2}$

Non pensare nemmeno che $\dots = \sqrt{n^2} - n = n - n = 0$.

Moltiplico e divido per $\sqrt{\dots} + n$:

$$\frac{\cancel{n^2}+7n+4-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+7n+4} + n} = \frac{7 + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{7}{n} + \frac{4}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{7}{2}$$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3+7n^2+4} - n$

Come razionalizzo le radici cubiche? $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

La uso con $a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B}$ ~

$$A-B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \underbrace{(\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2})}_{\text{cosa per cui moltip. e divido}}$$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$$

$$A - B$$

$$\sqrt[3]{m^3 + 7m^2 + 4} - m = \frac{\cancel{m^3} + 7m^2 + 4 - \cancel{m^3}}{\sqrt[3]{(m^3 + 7m^2 + 4)^2} + \sqrt[3]{m^3(m^3 + 7m^2 + 4)} + m^2}$$

$$\sqrt[3]{A^2} \quad \sqrt[3]{AB} \quad \sqrt[3]{B^2}$$

Raccordo m^2 sopra e sotto ... $\rightarrow \frac{7}{3}$

Esempio 4 $\sqrt{m+5} - \sqrt[3]{2m+7} \rightarrow +\infty$

Raccordo $\sqrt{m}$ che comanda:

$$\sqrt{m} \left\{ \sqrt{1 + \frac{5}{m}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt[3]{2m+7} \right\} = \sqrt{m} \left\{ \sqrt{1 + \frac{5}{m}} - \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{m}} \sqrt[3]{2 + \frac{7}{m}} \right\}$$

$$= \sqrt{m} \left\{ \underbrace{\sqrt{1 + \frac{5}{m}}}_{\downarrow \infty} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{m}}}_{\downarrow 0} \underbrace{\sqrt[3]{2 + \frac{7}{m}}}_{\downarrow \sqrt[3]{2}} \right\}$$

Esempio 5 $a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$

$$a_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \quad a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$$

$$a_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} \dots$$

Dico che $a_n \rightarrow 0$.

Non pensare nemmeno che segua dal fatto che tutti i termini tendono a 0.

Dim

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} (n+1)$$

$\uparrow$ termine più grande $\uparrow$ numero dei termini

Ora basta osservare che $RHS \rightarrow 0$ e $LHS \rightarrow 0$.

Esempio 6 $a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ora però $a_n \rightarrow +\infty$. Perché?

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot (n+1)$$

$\uparrow$ termine + piccolo $\uparrow$ # termini

Ora RHS $\rightarrow +\infty$, quindi per confronto a 2 anche $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 7 $a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ Tende ad un limite $l \in (0, +\infty)$

$$\frac{1}{2n} (n+1) \leq a_n \leq \frac{1}{n} (n+1)$$

Quindi l , se esiste, sta in $[\frac{1}{2}, 1]$. Perché l esiste?

Proviamo a sperare nella monotonia...

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0$$

Quindi per monotonia a_n ha limite.

Oss. Vedremo un giorno che $l = \log 2$

Esempio 8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + n^a + 5}{n^5 + n^3 + 1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 5 \\ 1 & \text{se } a = 5 \\ 0 & \text{se } a < 5 \end{cases}$

Come lo dimostro? Raccolgo n^5 sopra e sotto e concludo

Esempio 9 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ e & \text{se } a = 1 \\ 1 & \text{se } a < 1 \end{cases}$

$n^a \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Lo scrivo come e e faccio il limite dell'esponente

$$n^a \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n^a}{n} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = n^{a-1} \boxed{\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

dipende facilmente da $x = \frac{1}{n} \rightarrow 1$

Esempio 10 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 7x + 2} + x \quad [+\infty - \infty]$

Brutale: $\sqrt{\dots} + x = x + x \rightarrow -\infty$ TERRIBILE!!
 $\sqrt{x^2} = x$ va bene per $x > 0$, ma qui $x \rightarrow -\infty$

Pongo $y = -x$ e diventa $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 - 7y + 2} - y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{razionalizzo}}}{=} -\frac{7}{2}$

Esempio 11 $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - 3\pi} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

Lo riporto in 0 ponendo $y = x - \frac{3\pi}{2}$ in modo che $y \rightarrow 0$

Ricavo $x = y + \frac{3\pi}{2}$ e quindi il limite è diventato

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + y\right)}{2y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}$$

Esempio 12 Sia $a > 0$ e $b > 0$. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\frac{a^x + b^x}{2}} \quad [1^{+\infty}]$

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}$$

Faccio l'esponente

$$\frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) = \frac{1}{x} \boxed{\frac{\log\left(1 + \frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)}{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)$$

$\downarrow$
1

In un angolo mi calcolò

$$\frac{1}{x} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1 \right) = \frac{1}{x} \frac{a^x + b^x - 2}{2} = \frac{a^x - 1}{2x} + \frac{b^x - 1}{2x}$$

$\downarrow$ $\frac{1}{2} \log a$ $\downarrow$ $\frac{1}{2} \log b$ $= \log \sqrt{ab}$

Quindi il limite originario è $\sqrt{ab}$

Esempio 13 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{\frac{a^x + b^x}{2}} = \max\{a, b\}$

Chi comanda si raccoglie!

— o — o —