

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

"Dim" Essendo funz. PARI, basta fare lim per $x \rightarrow 0^+$.

Supponiamo di sapere che

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Allora posso dividere per $\sin x$ (che è > 0 nella zona) e ottengo

$$\boxed{1} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

Ma allora anche $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

"Dim" geometrica della disuguaglianza

Sia P' il simmetrico di P wrt asse x
 with respect to

Length. segmento $PP' = 2 \sin x$

Length. arco $PP' = 2x$

$$\text{segmento} \leq \text{arco} \Rightarrow 2 \sin x \leq 2x \Rightarrow \sin x \leq x$$

$$\text{Area}(OSQ) = \frac{1}{2} \cdot OS \cdot QS = \frac{1}{2} \tan x$$

$$\text{Area settore}(OSP) : \text{Area cerchio} = x : 2\pi$$

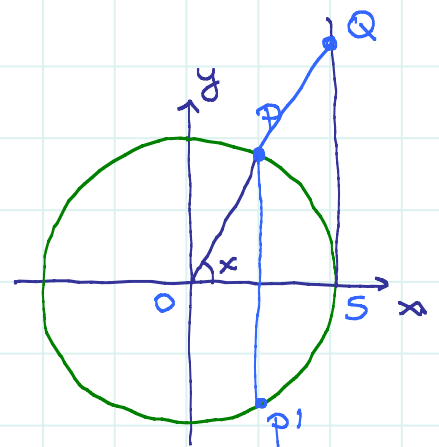
$\frac{x}{11}$

$$\text{Area settore} = \frac{x \pi}{2\pi} = \frac{1}{2} x$$

Area settore $\leq$ Area triangolo

$$\Rightarrow x \leq \tan x$$

— 0 — 0 —



Da questo segue (tutti i limiti sono per $x \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\downarrow \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$$

$\downarrow 1 \quad \downarrow 1$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\arctan x}{x}$$

Pongo $y = \arctan x$ da cui $x = \tan y$
Quando $x \rightarrow 0$, anche $y \rightarrow 0$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

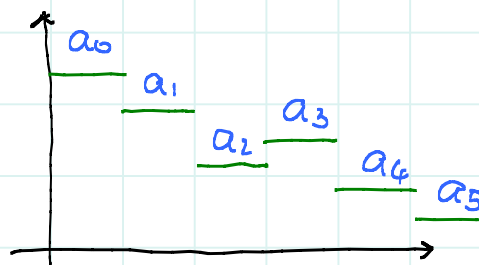
$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \text{con lo stesso metodo } (y = \arcsin x)$$

— 0 — 0 —

CRITERIO SUCC. $\rightarrow$ FUNZIONI

(I limiti di succ. aiutano a fare i limiti di funzioni)

Bruttalmente: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$



Lemma Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup D = +\infty$

Sia a_n una succ. Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Supponiamo che, definitivamente in n , si abbia

$$f(x) = a_n \quad \forall x \in D \cap [n, n+1)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \leftarrow \text{posto che questo esista in } \overline{\mathbb{R}}$$

Dim Quello che succede ad a_n definitivamente in n , succede a $f(x)$ per x grandi abbastanza

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^{27}}$

Per $x \in [n, n+1)$ abbiamo

$$\frac{3^x}{x^{27}} \geq \frac{3^n}{(n+1)^{27}}$$

↑
Num. + piccolo
Den. + grande

Ora RHS $\rightarrow +\infty$ (come funzione costante a tratti)
quindi per confronto a 2 anche LHS $\rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ Punto ai carabinieri. Per $x \in [n, n+1)$:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Ora $\text{RHS} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \rightarrow e$

$$\text{LHS} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\rightarrow e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\rightarrow 1} \rightarrow e$$

(se $e_n \rightarrow e$, anche $e_{n+1} \rightarrow e$)

Quindi per i carabinieri $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Prima conseguenza $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Pongo $y = -x$ (da cui $x = -y$) in modo che $y \rightarrow +\infty$. Diventa

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{\substack{\downarrow \\ e \\ \text{(volendo } z=y-1)}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)}_{\downarrow 1}$$

Seconda conseguenza: ora sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ora pongo $\frac{1}{x} = y$. I due limiti diventano

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^-} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Quindi alla fine

$$\boxed{\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e}$$

Ora il $\log$ è una funzione continua. Facendo il $\log$ (sinonimo di $\ln$ e di $\log_e$) a dx e ex si ottiene che

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \log(1+y) = \log e = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Adesso pongo $y = \log(1+x)$, da cui $1+x = e^y$ e quindi $x = e^y - 1$. Osservo che, quando $x \rightarrow 0$, anche $y \rightarrow 0$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Se uso base $a \neq e$ viene

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{\log(a^x)} - 1}{x} = \boxed{\frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}} \quad \log a \rightarrow \log a$$

$\downarrow$
 $\frac{1}{x \log a}$
 $(y = x \log a)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \forall a > 0$$

LIMITE DIMENTICATO $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x \quad [0 \cdot (-\infty)]$

Pongo $y = \log x$ e viene $(y \rightarrow -\infty \text{ e } x = e^y)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y \underset{z = -y}{=} \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-z} \cdot (-z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0 \quad (\text{esponenziale batte potenza})$$

Oss. Più in generale $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\log x|^b = 0 \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$

— 0 — 0 —