

Strumenti BASIC per il calcolo di limiti di funzioni

- teo. confronto a 2 e a 3 (esatt. come con le succ.)
- teo. algebrici (")
- funzioni continue (se f è cont. in x_0 , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)
- limiti notevoli
- cambi di variabili

METATEOREMA MISTERIOSO Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni sono continue nei pti in cui non hanno problemi burocratici (tipo denom. che si annullano, log di roba ≤ 0 , ...)

Cosa bisognerebbe dimostrare:

- ① che le funzioni elementari sono continue (dim. diversa a seconda delle funzioni)
- ② teo. algebrici
- ③ la composizione di funzioni continue è continua

Esempio 1 La funzione 2^x è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} 2^x = 2^{x_0}$.

$$|2^x - 2^{x_0}| = 2^{x_0} |2^{x-x_0} - 1|$$

Questo deve essere piccolo quando $x - x_0$ è piccolo

Prendiamo il caso $x > x_0$. Dato $\varepsilon > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c.

$$2^{x-x_0} - 1 < \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$$

Ponendo $x - x_0 = R$, vogliamo trovare δ t.c.

$$2^R - 1 < \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \quad \forall R \in [0, \delta]$$

Noi sappiamo dalle successioni che $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$, quindi

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 2^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \quad \forall m \geq m_0$$

Ma allora uso $\delta = \frac{1}{m_0}$ e così ho che

$$2^R - 1 < 2^{\frac{1}{m_0}} - 1 < \frac{\varepsilon}{2^{x_0}} \quad \forall R \in [0, \frac{1}{m_0}]$$

$\uparrow$
monotonia
di 2^x

Il caso $x < x_0$ si tratta ponendo $x - x_0 = -R$, e poi in maniera analoga.

Esempio 2 Dim. continuità della composizione in un caso semplice.

Ipotesi: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f continua in x_0

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ g continua in $f(x_0)$

Tesi: $g(f(x))$ è continua in x_0

Brutale: quando x è vicino a x_0 si ha $f(x)$ è vicino a $f(x_0)$
ma allora $g(f(x))$ è vicino a $g(f(x_0))$

Dim Devo dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad |g(f(x)) - g(f(x_0))| \leq \varepsilon$$

→ Mi viene dato $\varepsilon > 0$

→ Per la continuità di g esiste $\delta_1 > 0$ t.c.

$$|g(y) - g(f(x_0))| \leq \varepsilon \quad \forall y \in [f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1]$$

→ Uso la continuità di f con δ_1 al posto di ε .

Otengo $\delta_2 > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \delta_1 \quad \forall x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$$

Questo δ_2 è il δ che cercavo.

Infatti per ogni $x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$ abbiamo che

$$f(x) \in [f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1]$$

Ma allora

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| \leq \varepsilon \quad (\text{cont. di } g \text{ con } y = f(x))$$

— 0 — 0 —

Interpretazione brutale della composizione

→ Devo calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$

→ Pongo $y = f(x)$. Quando $x \rightarrow x_0$ ho che $y \rightarrow f(x_0)$

→ Quindi il limite è diventato $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$

LIMITI NOTEVOLI

Padri $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Figli: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Nipoti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \forall a > 0$$

↗ in base e

LIMITE DIMENTICATO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

Oss. Sono tutti del tipo $\frac{0}{0}$, tranne quello che viene e.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin x} \quad \frac{0}{0}$

$$\frac{e^{3x} - 1}{\sin x} = \boxed{\frac{e^{3x} - 1}{3x}} \cdot 3 \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}} \rightarrow 3$$

↓ ↓
1 1

(Pongo $y = 3x$
e osservo che $y \rightarrow 0$)

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2)}{\sin^2 x} \quad \frac{0}{0}$

$$\frac{\arctan(x^2)}{\sin^2 x} = \boxed{\frac{\arctan(x^2)}{x^2}} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \rightarrow 1$$

↓ ↓
1 1²

(Pongo $y = x^2$)

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{\sin x}$

$$f(x) = \boxed{\frac{\log(1 + \tan x)}{\tan x}} \cdot \boxed{\frac{\tan x}{x}} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}}$$

↓ ↓ ↓
1 1 1

(Pongo $y = \tan x$)

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \sin 1$ (è una funzione continua tranquilla)

Alternativa: Pongo $y = \cos x$ e osservo che $y \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$.

Quindi diventa

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sin y}{y} = \frac{\sin 1}{1} \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ $\frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0}$ Formula di L'Hôpital.

$$f(x) = \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

↓
 Pongo $y = \cos x - 1$
 e diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

— 0 — 0 —