

Oss. (su lezione precedente)

Nella dimostrazione della radice e del rapporto abbiamo usato una sola delle disug. nella def. di limite (dall'alto o dal basso a seconda dei due casi).

Un enunciato con ipotesi più deboli è il seguente

- Se esiste $L > 1$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} \geq L$ defiu., allora $a_n \rightarrow +\infty$
- Se esiste $L \in (0, 1)$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} \leq L$ defiu., allora $a_n \rightarrow 0$

Idem per il rapporto.

Oss. (su rapporto $\rightarrow$ radice)

Intanto vale anche se $L = 1$.

Può succedere che il rapporto NON ha limite, ma la radice sì.

Esempio

$$a_n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$$

I rapporti diventano $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$ quindi non hanno limite.

D'altra parte

$$\boxed{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \boxed{\sqrt[n]{2}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

GERARCHIA DEGLI INFINITI

Esempio 1

$$\frac{3^n}{n^{78}} \rightarrow +\infty$$

(esponenziale batte potenza)

Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^{78}} \cdot \frac{n^{78}}{3^n} = 3 \cdot \boxed{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{78}} \rightarrow 3 > 1$$

$\downarrow$
 1

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 3$, di sicuro $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 2

$$\frac{n!}{3^n} \rightarrow +\infty$$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{3 \cdot \cancel{3^n}} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{n!}} \rightarrow +\infty$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty$, anche $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 3

$$\frac{n^n}{n!}$$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{(n+1)} (n+1)^n}{\cancel{(n+1)} \cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{n^n}$
 $= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow e > 1$, avremo che $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 4

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Basta osservare che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Uso rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Il rapporto tende a $\frac{1}{e}$, come nell'esempio 3, quindi anche la radice tende a $\frac{1}{e}$

Esempio 5

$$\boxed{\frac{3^{n^2}}{n^n}}_{a_n}$$

Uso radice $\sqrt[n]{a_n} = \frac{3^n}{n} \rightarrow +\infty$ (visto prima), quindi $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 6

$$\frac{(2n)!}{n^n}$$

Rapporto :
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^n (n+1)} \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$= \frac{2(2n+1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow +\infty$$

Quindi $\frac{(2n)!}{n^n} \rightarrow +\infty$

Oss. Potete anche dim. che $(2n)! \geq n^n \cdot n!$

Esempio 7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{3n}{n}} = \frac{27}{4}$

Rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = \binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{(2n)! n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{(2n+2)! (n+1)!} \frac{(2n)! n!}{(3n)!}$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)! (n+1)n!} \frac{(2n)! n!}{(3n)!} \rightarrow \frac{27}{4}$$

polinomio su
polinomio, raccolgo
 n^3

Quindi $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{27}{4}$

Esempio 8 $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$

$\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \rightarrow +\infty$

Oss. $\sqrt[n]{2}$

Uso rapporto $\rightarrow$ radice con $a_n = 2$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{2} \rightarrow 1$, quindi...

NO! CIRCULAR REASONING : nella dim. di rapporto $\rightarrow$ radice abbiamo usato che $\sqrt[n]{\text{numero}} \rightarrow 1$

Esempio 9 $\sqrt[n]{\text{polinomio}} \rightarrow 1$

In pratica: $\sqrt[n]{n^4 + 3n^3 - 7n + 25}$. Raccolgo n^4

$$\boxed{\sqrt[n]{n^4}} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^3} + \frac{25}{n^4}}$$

$\downarrow$
1

$$\text{Ora } \sqrt[n]{n^4} = (\sqrt[n]{n})^4 \rightarrow 1$$

Per il resto, osserviamo che

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{3}{n} + \dots \leq 27 \quad \text{definitivo.}$$

quindi

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} \leq \boxed{\sqrt[n]{1 + \dots}} \leq \boxed{\sqrt[n]{27}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
1 1 1

definitivo.

Esempio 10 $\sqrt[n]{7^n - n^7 + n^5 \cos(n!)} \rightarrow 7$

Raccolgo 7^n dentro la radice

$$\sqrt[n]{7^n} \cdot \sqrt[n]{1 - \boxed{\frac{n^7}{7^n}} + \boxed{\frac{n^5 \cos(n!)}{7^n}}}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
0 0

$$- \frac{n^5}{7^n} \leq \frac{n^5 \cos(n!)}{7^n} \leq \frac{n^5}{7^n}$$

Poi con la radice concludo come prima