

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

Dim. voglio $2^n \geq M$ defiu.

→ Se $M \leq 0$ vera $\forall n \geq 0$

→ Se $M > 0$ vera $\forall n \geq n_0$ purché $n_0 \geq \log_2 M$

occhio: questo è circular reasoning: per definire $\log_2 M$ serve sapere che 2^n può diventare grande a piacere

Per dim DAVVERO posso usare $\underbrace{2^n}_{+\infty} \geq \underbrace{1+n}_{+\infty}$
 $(1+x)^n \geq 1+nx$ con $x=1$

Esempio 1 bis $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ se $a > 1$

Uso Bernoulli con $x = a-1$. Otengo $\underbrace{a^n}_{+\infty} \geq \underbrace{1+n(a-1)}_{+\infty}$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ [Brutal mode: $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2^0 = 1$]

Qui serve teo. alg.
per l'esponenziale
per dim. il quale
serve già il limite

Pseudo Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$

Faccio radice n-esima

$$1+x \geq \sqrt[n]{1+nx}$$

Uso $x = \frac{1}{n}$ e otengo

facile

$$\underbrace{1}_{1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{1} \leq \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{1}$$

Esempio 2-bis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$

Uso $x = \frac{a-1}{n}$ e ottengo $\boxed{1} \leq \sqrt[n]{a} \leq \boxed{1 + \frac{a-1}{n}}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

Questo funziona se $a \geq 1$. Se $a \in (0,1)$ osservo che $a = \frac{1}{b}$ con $b > 1$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1 \quad \because$$

Tabellina di limiti

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad \forall a > 0$$

$$a^n \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } a > 1 \\ \rightarrow 1 & \text{se } a = 1 \\ \searrow 0 & \text{se } a \in [0,1) \end{cases}$$

$a^n \rightarrow 0$ per $0 \leq a < 1$. Se $a=0$ è ovvio. Se $a \in (0,1)$ lo scrivo come $\frac{1}{b}$ e allora

$$a^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow 0$$

Se $a=1$ la succ. a^n vale sempre 1, quindi tende a 1.

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \rightarrow \text{Tabellina}$

Bernoulli modificata

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x^2 \quad \forall x \geq 0$$

Faccio radice n -esima: $\sqrt[n]{\frac{n(n-1)}{2} x^2} \leq 1+x$

Scelgo $x = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ e ottengo $\boxed{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \boxed{1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

— 0 — 0 —

- Criterio della radice
- Criterio del rapporto
- Criterio rapporto → radice

CRITERIO RADICE Sia a_n una succ. con $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora

- se $l > 1 \rightsquigarrow a_n \rightarrow +\infty$
- se $l < 1 \rightsquigarrow a_n \rightarrow 0$
- se $l = 1$, allora BOM

CRITERIO RAPPORTO Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ defn.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora stessa conclusione della radice.

CRITERIO RAPPORTO → RADICE Sia a_n succ. con $a_n > 0$ defn.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ (stesso l)

Utilizzo operativo Devo fare il lim. di a_n e non sono capace.

Provo a fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ oppure di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ che magari sono capace.

Se esiste e viene $\neq 1$, allora i

Se il limite della radice viene 1, allora con il rapporto non ho speranza, perché può o non esistere, ma se esiste è 1.

Dim. radice Caso $l > 1$.

Per ipotesi sappiamo $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, quindi defiu.

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}, \text{ quindi}$$

$$\underbrace{a_n}_{\rightarrow +\infty} \geq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{\rightarrow +\infty}$$

(se $l = +\infty$ uso 2025 invece di $\frac{l+1}{2}$)

Caso $l < 1$

$$l \quad \frac{l+1}{2} \quad 1$$

ora $\frac{l+1}{2} \in (0, 1)$

Ora

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \text{ definitiv. quindi}$$

$$\underbrace{0}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{a_n}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{\downarrow 0}$$

Dim. rapporto Caso $l > 1$

$$1 \quad \frac{l+1}{2} \quad l$$

Definitivamente, diciamo per $n \geq n_0$, avremo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$

Quindi $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \geq \frac{l+1}{2}$ cioè $a_{n_0+1} \geq \frac{l+1}{2} \cdot a_{n_0}$ (ho molt. perché $a_{n_0} > 0$)

$$\text{Allo stesso modo } a_{n_0+2} \geq \frac{l+1}{2} a_{n_0+1} \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$$

$$\text{e quindi per induzione ... } a_{n_0+k} \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^k a_{n_0}$$

$$\text{cioè } a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{e quindi } a_n \geq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{l+1}\right)^{n_0} a_{n_0}}_{\text{numero positivo}}$$

Caso $l < 1$ Allo stesso modo arrivo a (però ora $\frac{l+1}{2} \in (0, 1)$)

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \left(\frac{2}{l+1}\right)^{n_0} a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

Dim. rapporto $\rightarrow$ radice Dimostrazione in due fasi

Supponiamo che il rapporto tenda ad $l \in \mathbb{R}$ (l'altro caso è più semplice).

$$\begin{array}{c} l - \frac{\varepsilon}{2} \quad l \quad l + \frac{\varepsilon}{2} \\ | \quad | \quad | \\ \hline \end{array}$$

Definitiv., diciamo per $n \geq n_0$, avremo che

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui per induzione come prima

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0} \leq a_n \leq \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0} a_{n_0}$$

Ora faccio la radice n -esima di tutto

$$\underbrace{\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n}{n}} \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\frac{n_0}{n}} a_{n_0}}_{\downarrow 1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \underbrace{\left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n}{n}} \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\frac{n_0}{n}} a_{n_0}}_{\downarrow 1}$$

Poiché RHS (right-hand side) $\rightarrow l + \frac{\varepsilon}{2}$, definit. $\text{RHS} \leq l + \varepsilon$
 $\uparrow \uparrow$ $\uparrow$

Poiché LHS $\rightarrow l - \frac{\varepsilon}{2}$, definit. $\text{LHS} \geq l - \varepsilon$

Quindi definitiv. $l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq l + \varepsilon$
che è quello che volevamo.

— o — o —