

RETTEA REALE ESTESA

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Prima comodità Quando scrivo $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$ intendo che siamo nei primi 3 casi, cioè il limite esiste, finito o infinito.

Seconda comodità Le usuali 4 operazioni si estendono abbastanza bene a $\bar{\mathbb{R}}$, nel modo usuale

Esempi

$$\begin{array}{lll} 7 + \infty = +\infty & 7 - \infty = -\infty & +\infty + \infty = +\infty \\ 5 \cdot +\infty = +\infty & -7 \cdot (-\infty) = +\infty & \frac{18}{+\infty} = 0 \quad (0^+) \end{array}$$

Casi problematici

$$+\infty - \infty$$

$$0 \cdot (\pm \infty)$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{7}{0}$$

$$\frac{7}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{7}{0^-} = -\infty$$

↑
Questi volevo ok

TEOREMI ALGEBRICI SUI LIMITI

Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

$$a_n \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$$

$$a_n - b_n \rightarrow l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

TRANNE nei casi problematici (le operazioni si intendono in $\bar{\mathbb{R}}$).

Achtung! Achtung! Nei casi problematici (AKA forme indeterminate) si deve intendere che "il limite della somma o diff... non è deducibile solo dai limiti dei due pezzi"

Non vuol dire che il limite non esiste.

<u>Esempi</u>	$a_n = 2n$	$b_n = n$	$a_n - b_n \rightarrow +\infty$
	$a_n = 2n$	$b_n = 3n$	$a_n - b_n \rightarrow -\infty$
	$a_n = 2n$	$b_n = 2n - 42 + \frac{1}{n}$	$a_n - b_n \rightarrow 42$
	$a_n = 2n$	$b_n = 2n + (-1)^n$	$a_n - b_n$ non ha limite

Dim. somma nel caso finito Ipotesi $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$
Tesi $a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2$

Brutta copia $|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)|$ lo voglio $\leq \varepsilon$ definitivamente.

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| &= |(a_n - l_1) + (b_n - l_2)| \\ &\leq |a_n - l_1| + |b_n - l_2| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Bella copia

→ Mi viene dato $\varepsilon > 0$

→ Uso la def. di limite per a_n e b_n con $\frac{\varepsilon}{2}$. Ottengo

$$|a_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_a \qquad |b_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_b$$

→ Ma allora $\forall n \geq \max\{n_a, n_b\}$ funziona il conto della brutta.

— o — o —

Supponiamo $a_n \rightarrow +\infty$ e b_n limitata superiormente
(se b_n ha limite reale o anche $+\infty$, questa condizione è verificata)

Allora $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

Dim Ipotesi : $a_n \rightarrow +\infty$ $b_n \geq B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
Tesi : $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

Brutta $a_n + b_n \geq M + B$ definitivamente, ma io voglio
 $a_n + b_n \geq M$ definitivamente.

Bella:

→ prendo $M \in \mathbb{R}$

→ uso la def. di $a_n \rightarrow +\infty$ con $M - B$, quindi trovo n_0 t.c.

$$a_n \geq M - B \quad \forall n \geq n_0$$

→ ora per ogni $n \geq n_0$ vale che

$$a_n + b_n \geq M - B + B = M \quad \ddot{\smile}$$

Dim. prodotto nel caso finito Ipotesi : $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$
Tesi : $a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$

Brutta : $|a_n b_n - l_1 l_2|$ [Termine misto!]

$$= |a_n b_n - a_n l_2 + a_n l_2 - l_1 l_2|$$

$$= |a_n (b_n - l_2) + l_2 (a_n - l_1)|$$

$$\leq |a_n| \cdot |b_n - l_2| + |l_2| \cdot |a_n - l_1|$$

↑ ↑ ↑ ↑
non può essere piccolo fisso piccolo
superiore perché
 a_n è limitata

Punto ad avere $\frac{\varepsilon}{2}$ ed $\frac{\varepsilon}{2}$.

Bella

→ prendo $\varepsilon > 0$

→ osservo che a_n è limitata (avendo limite), quindi esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ uso la def. di limite

per b_n con $\frac{\varepsilon}{2A}$

$$|b_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2A} \quad \forall n \geq m_b$$

per a_n con $\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|l_2|}$

$$|a_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2|l_2|} \quad \forall n \geq m_a$$

→ A questo punto per il conto fatto in brutta

$$\begin{aligned} |a_n b_n - l_1 l_2| &\leq |a_n| \cdot |b_n - l_2| + |l_2| \cdot |a_n - l_1| \\ &\leq A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + |l_2| \frac{\varepsilon}{2|l_2|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

per ogni $n \geq \max \{m_a, m_b\}$

$\uparrow$ due $\uparrow$ definitivamente per a_n e b_n

N1: potevi aver diviso per 0. Come ne usciamo?

Dovemo usare le due def. di limite con $\frac{\varepsilon}{2A+25}$ e $\frac{\varepsilon}{2|l_2|+37}$
Il resto funzionava uguale!

Esercizio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n \cos n = +\infty$

$$\underbrace{n}_{\downarrow +\infty} \underbrace{(n - \cos n)}_{\downarrow +\infty} \rightarrow +\infty$$

$$\underbrace{n - \cos n}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{n - 1}_{\downarrow +\infty}$$

per confronto a 2

Esercizio 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{2n^2 - 7} = \frac{1}{2}$$

SLOGAN: chi comanda si raccoglie!

$$\frac{\cancel{n^2} \left(1 + \boxed{\frac{3}{n}} + \boxed{\frac{1}{n^2}} \right)}{\cancel{n^2} \left(2 - \boxed{\frac{7}{n^2}} \right)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (\text{teorema algebrico})$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0$

Esempio 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Più in generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\text{Mostro})}{n} = 0$

$$-1 \leq \sin(\text{Mostro}) \leq 1$$

Divido per n

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin(\text{Mostro})}{n} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0 \quad 0$
(Carabinieri)

Esempio 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \arctan n}{n + \arctan(n^2)} = +\infty$$

$$\frac{\boxed{n^2} \left(1 + \frac{\boxed{\arctan n}}{n^2} \right)}{\cancel{n} \left(1 + \frac{\boxed{\arctan(n^2)}}{n} \right)}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad 0 \quad 0$

Basta $0 \leq \arctan(n) \leq \frac{\pi}{2}$

Divido e uso
i carabinieri