

LIMITATEZZA

Def. Una succ. a_n si dice

- limitata superiormente se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- limitata inferiormente " $a_n \geq L$ "
- limitata se è lim. sup. e inf., o equivalentemente

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq L$$

compresa tra $-L$ e L

MONOTONIA

Def. Una succ. a_n si dice

- strett. crescente se $a_{n+1} > a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- debolm. cresc. se $a_{n+1} \geq a_n$ "
- strett. decr. se $a_{n+1} < a_n$ "
- debolm. decr. se $a_{n+1} \leq a_n$ "

Conseguenze o def. equivalente

Def. Una succ. si dice

- strett. cresc. se $m > n \Rightarrow a_m > a_n$
- debolm. cresc. se $m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$
- strett. decresc. se $m > n \Rightarrow a_m < a_n$
- debolm. decresc. se $m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$

Oss. Nei debolmente potremmo anche mettere $m \geq n$

Oss. Debolm. cresc. $\Rightarrow$ limitata inferiormente

Debolm. decr. $\Rightarrow$ limitata superiormente

TEOREMA SUCC. MONOTONE

Morale: le succ. monotone hanno solo 2 possibili tipi di comportamento

Teorema (Versione crescente)

Sia a_n una succ. debolmente crescente (se strett., ancora meglio)

Allora

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Inoltre

$$l = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dim. Ci sono due casi.

Caso 1: $l = +\infty$ Ipotesi: a_n deb. cresc. $\sup = +\infty$

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$

Devo dim. che

$\forall M \in \mathbb{R}$ si ha $a_n \geq M$ definitiv.

Perché è vero?

→ prendo $M \in \mathbb{R}$

→ poiché $\sup = +\infty$, per caratt. $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{m_0} \geq M$

→ per monotonia $a_n \geq a_{m_0} \geq M$ per ogni $n \geq m_0$

Caso 2: $l \in \mathbb{R}$ Ipotesi: a_n deb. cresc. $\sup = l \in \mathbb{R}$

Tesi: $a_n \rightarrow l$

Devo dim. che

$\forall \varepsilon > 0$ si ha $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ definitiv.

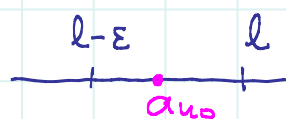
Perché è vero?

→ prendo $\varepsilon > 0$

→ per caratt. di $\sup$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{m_0} \geq l - \varepsilon$

→ per monotonia $a_n \geq a_{m_0} \geq l - \varepsilon$ per ogni $n \geq m_0$ (disug. sx)

La disug. $a_n \leq l + \varepsilon$ è vera, e anzi $a_n \leq l$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, poiché l è un maggiorante.



Versione decrescente : Se a_n è deb. decr., allora

$$a_n \rightarrow l = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

[Dim. per esercizio]

Corollario Se a_n è deb. cresc. e limitata superiormente, allora

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

Analogo con deb. decr. + lim. inf.

Oss. Supponiamo a_n deb. cresc. e limitata sup.

Posso dire che $a_n \rightarrow l^-$?

[NO! Se $a_n \equiv l$ definitivamente non è vero.

Se una volta vale l , poi è l per sempre]

Se invece a_n è STRETT. cresc. e lim. sup., allora davvero

$$a_n \rightarrow l^-$$

NUMERO e (NUMERO DI NEPERO)

Teorema Consideriamo la succ.

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \geq 1$$

Allora e_n è deb. cres. (pure strett.) e limitata sup.

Quindi ha un limite, che indichiamo con e .

Inoltre

$$2 < e < 3 \quad (e = 2,71828\dots)$$

Dim.

Fatto 1 (non serve a nulla) $e_n \geq 2 \quad \forall n \geq 1$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \quad \because \text{Bernoulli con } x = \frac{1}{n}$$
$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Fatto 2 : e_n è debol. cresc. (a quel pto $e_n \geq e_1 = 2 \quad \because$)

[Dimostriamo che $e_n \geq e_{n-1}$]

$$e_n \geq e_{n-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

[Tenere n come esponente comune]

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{n}$$

L'ultima è vera perché è la Bernoulli con $x = -\frac{1}{n^2}$ che è > -1 abbastanza presto (il vostro n è almeno 2)

Fatto 3 : $e_n \leq 3$ per ogni $n \geq 1$.

Inizio brutta copia: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \cdot 1^{n-k}$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

≤ 1 ≤ 1

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$< 1 + 1 + 1 = 3$$

Cosa abbiamo usato?

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad \text{per ogni } 1 \leq k \leq n$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\text{cioè } k! \geq 2^{k-1} \leadsto \text{facile induzione})$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad (\text{facile induzione})$$

Mettendo tutto insieme (BELLA COPIA)

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

↑
Binomio
Newton

↑
separo
 $k=0$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

↑
USO $\textcircled{1}$

↑
USO $\textcircled{2}$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

↑
SHIFT
degli indici

Q.E.D.

Chi esclude che tenda proprio a 3? Basta tenersi un piccolo avanzo nelle stime abbondanti che abbiamo fatto.

— 0 — 0 —