

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ anzi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ defiu.
 $\uparrow$
 gratis
 per $n \geq 1$

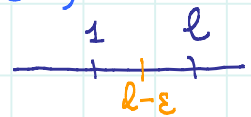
Quando succede che $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$? Se e solo se $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ e questo è vero definitivamente

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ NON ESISTE

Non tende a $+\infty$ (definitiv. dovrebbe essere $a_n \geq 2023$)

" $-\infty$ (" " $a_n \leq -37$)

Non tende a $l > 1$ (definitiv. dovrebbe stare sopra $l - \varepsilon$ come in figura)



Allo stesso modo si escludano tutti gli $l \neq \pm 1$



Non può essere $l = 1$ (defiu. dovrebbe stare tra 0 e 2, uso $\varepsilon = 1$)

Idem per $l = -1$.

CONSEGUENZE DELLA DEF. DI LIMITE

① Sia a_n una succ. t.c. $a_n \rightarrow +\infty$. Allora a_n è limitata dal basso, cioè

$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a_n \geq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim Uso la def. di limite con $M = 2023$ e ottengo n_0 t.c.
 $a_n \geq 2023 \quad \forall n \geq n_0$

Adesso pongo $L := \min \{ 2025, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m_0-1} \}$

Claim $a_n \geq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- se $n \leq m_0 - 1$, allora è proprio la def. di L
- se $n \geq m_0$, allora $a_n \geq 2025 \geq L$

② Sia $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora a_n è limitata dall'alto e dal basso, cioè

$$\exists A \in \mathbb{R} \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad A \leq a_n \leq B$$

Dim. Uso la def. di limite con $\varepsilon = 5$. Trovo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
 $l - 5 \leq a_n \leq l + 5 \quad \forall n \geq m_0$

Adesso pongo

$$A := \min \{ l - 5, a_0, a_1, \dots, a_{m_0} \}$$

$$B := \max \{ l + 5, a_0, a_1, \dots, a_{m_0} \}$$

e concludo come prima

Oss. La limitatezza si può anche definire dicendo

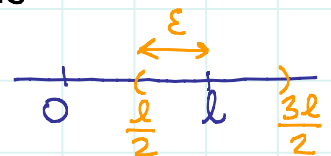
$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |a_n| \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

è come la precedente
con $A = -L$ e $B = L$.

PERMANENZA DEL SEGNO E SIMILI

Se $a_n \rightarrow l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente

Dim. Prendo $\varepsilon = \frac{l}{2}$ nella def. e ho che



$$\frac{l}{2} \leq a_n \leq \frac{3l}{2} \quad \text{definitiv.}$$

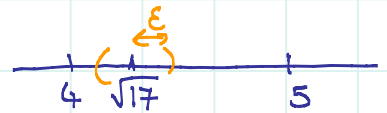
↑
Da questa deduco che

$$a_n \geq \frac{l}{2} > 0 \quad \text{defin.}$$

Se $a_n \rightarrow \sqrt{17}$, allora $4 \leq a_n \leq 5$ definitivamente.

Dim. Basta scegliere ε abbastanza piccolo, tale che

$$4 \leq \sqrt{17} - \varepsilon \quad \text{e} \quad \sqrt{17} + \varepsilon \leq 5$$



CONFRONTO A 2 Siano a_n e b_n due succ. tali che $a_n \leq b_n$ definitivamente.

(1) Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora anche $b_n \rightarrow +\infty$

(2) Se $b_n \rightarrow -\infty$, allora anche $a_n \rightarrow -\infty$

Dim (1) Per ipotesi $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq m_0$

Poiché $a_n \rightarrow +\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad a_n \geq M \quad \forall n \geq n_1$$

Pongo $n_2 := \max\{m_0, n_1\}$ e sono sicuro che

$$b_n \geq a_n \geq M \quad \text{quindi} \quad b_n \geq M \quad \forall n \geq n_2$$

$\uparrow$ vera dopo m_0 $\uparrow$ vera dopo n_1

La dim. di (2) è analoga.

Achtung! Ogni altra deduzione è ABUSIVA e prob. FALSA

Se $b_n \rightarrow 5$, allora a_n può scegliere tra

- $a_n \rightarrow l$ con $l \leq 5$
- $a_n \rightarrow -\infty$
- a_n può non avere limite

Doppio achtung! Se $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \rightarrow 5^-$, allora a_n può tendere a 5 pure lei

$$a_n = 5 - \frac{3}{n}$$

$$b_n = 5 - \frac{1}{n}$$

SLOGAN: le disug. scritte non passano al limite

CONFRONTO A 3 (teorema dei carabinieri)

Siano a_n, b_n, c_n tre succ. Supponiamo che

(1) $a_n \leq b_n \leq c_n$ defiu. $\forall n \geq n_a$

(2) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(3) $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

} stesso l REALE

Allora anche $b_n \rightarrow l$

Dim Devo dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha che
 $l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon$ defiu.

Per ipotesi (2) sappiamo che

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon \quad \text{defiu.} \quad \forall n \geq n_a$$

Per ipotesi (3) sappiamo che

$$l - \varepsilon \leq c_n \leq l + \varepsilon \quad \text{defiu.} \quad \forall n \geq n_c$$

Ma allora

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l + \varepsilon$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $n_a \quad n_a \quad n_a \quad n_c$

cioè

$$l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon \quad \text{defiu.} \quad \because \forall n \geq \max\{n_a, n_c, n_a\}$$

Oss. Nella dimostrazione abbiamo usato solo due delle 4 disug. che avevamo.

— o — o —