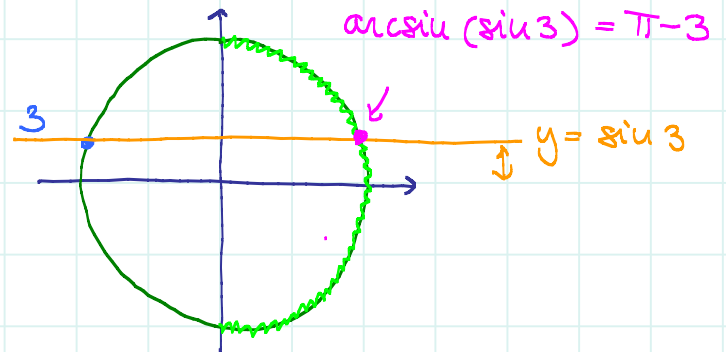
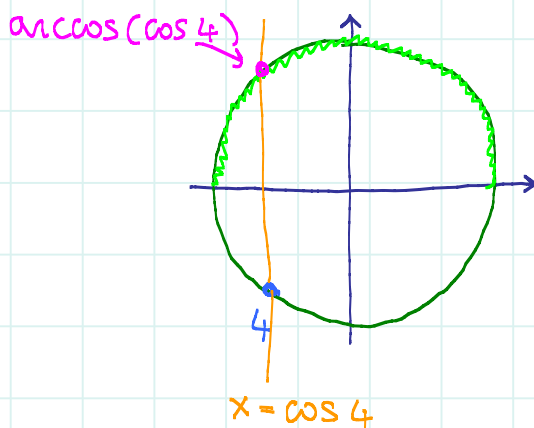


Esercizio 1 Calcolare $\arccos(\cos 4)$ e $\arcsin(\sin 3)$

Sicuramente NON sono 4 e 3, perché fuori range.

Sicuramente hanno senso perché $\cos 4$ e $\sin 3$ stanno in $[-1, 1]$



Conclusione: $\arccos(\cos 4) = 2\pi - 4$
 $\arcsin(\sin 3) = \pi - 3$

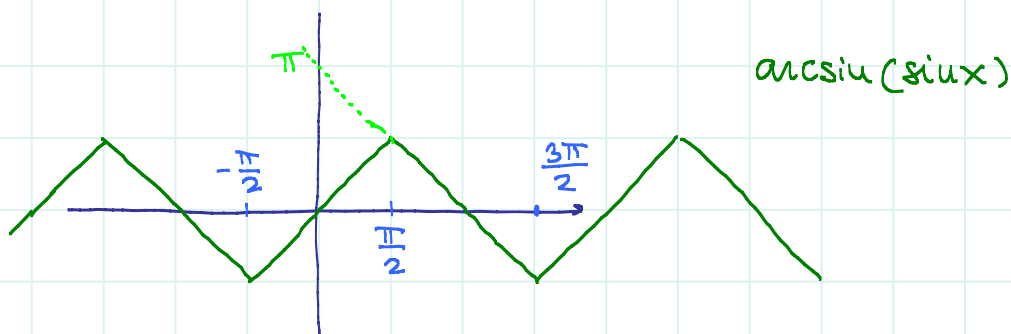
Esercizio 2 Disegnare il grafico di $f(x) = \arcsin(\sin x)$

Fatto 1 : è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Fatto 2 : è periodica di periodo 2π (in generale Mostro $(\sin x)$ o anche Mostro $(\cos x)$ sono periodiche di periodo 2π , ma ovviamente il periodo minimo potrebbe essere più piccolo)

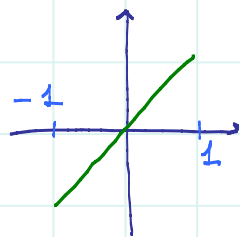
Fatto 3 : $f(x) = x$ per ogni $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (def. di funz. inversa)

Fatto 4 : $f(x) = \pi - x$ per ogni $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (stesso discorso del 3 fatto sopra)



Esercizio 3 Disegnare $\sin(\arcsin x) = f(x)$

Ha senso solo per $x \in [-1, 1]$ e in quel caso vale x .



FORMULE UTILI

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

(e $-\frac{\pi}{2}$ per $x < 0$)

Poniamo $\alpha = \arctan x$. Allora $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\tan \alpha = x$

Ma allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}$$

Il che è come dire che $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \alpha$
questo sta in $(0, \frac{\pi}{2})$ pure lui

Ma allora abbiamo finito!

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \therefore$$

[Estendere al caso $x < 0$].

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Come prima sia $\alpha = \arcsin x$, quindi $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\sin \alpha = x$

Per archi associati

$$\cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}_{\substack{\text{sta in} \\ [0, \pi]}}\right) = \sin \alpha = x$$

Questo ci dice che $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x$, ma allora

$$\arcsin x + \arccos x = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \therefore$$

Esercizio 4 Quanto fa $\arccos(\sin x)$?

Intanto ha senso per ogni $x \in \mathbb{R}$. Possiamo usare gli archi associati

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

quando $\frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi]$

A quel punto poi si estende per periodicità dopo aver capito cosa fa in $[\pi, 2\pi]$

Esercizio 5 Quanto fa $\sin(\arccos x)$?

Intanto ha senso per $x \in [-1, 1]$ e sarà ≥ 0 (sin di roba in $[0, \pi]$)

Allora

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \text{con il segno + se } \alpha \in [0, \pi] \end{array}$$

Esercizio 6 $f(x) = x + 2 \arctan(x^3)$ è una funzione DISPARI

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) + 2 \arctan((-x)^3) = -x + 2 \arctan(-x^3) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{cubo è dispari} \\ &= -x - 2 \arctan(x^3) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{arctan è dispari} \\ &= -f(x) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$f(x) = x^4 + x^3$ non è né pari né dispari

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + (-x^3) = x^4 - x^3 \quad \text{non è } x^4 + x^3 \\ &\quad \text{non è } -x^4 - x^3 \end{aligned}$$

Per vedere che sono davvero diversi, sostituisco dei valori

$$f(1) = 2 \quad f(-1) = 0 \quad \text{ed è "chiaro" che } 0 \text{ non è } \pm 2$$

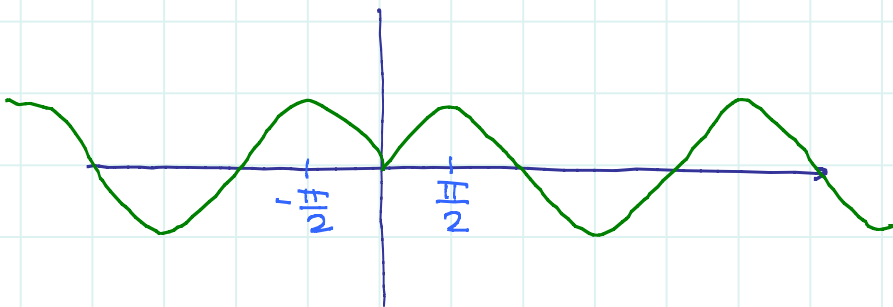
Esercizio 7 Dimostrare che $|\sin x|$ è periodica

Banale! $|\sin(x+2\pi)| = |\sin x|$
 $\uparrow$
 $\sin$ è periodica

In realtà è anche π -periodica, in quanto

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } f}}{f(x+\pi)} = |\underset{\substack{\uparrow \\ \text{and. assoc.}}}{\sin(x+\pi)}| = |-\sin x| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{val. ass.} \\ \text{periodico}}}{|\sin x|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } f}}{f(x)}$$

Dimostrare che $\sin |x|$ NON è periodica



Esistono due soluzioni di $f(x) = 1$ che distano π

Se fosse periodica, esisterebbero infinite coppie di soluzioni di $f(x) = 1$ che distano π , ma queste si scrivono.

— 0 — 0 —