

OPERAZIONI SUI GRAFICI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a > 0$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } D \subseteq \mathbb{R}$$

$f(x) \pm a \rightsquigarrow$ traslazione verticale (in alto se $a > 0$)

$f(x \pm a) \rightsquigarrow$ traslazione orizzontale (sx se $a > 0$)

$-f(x) \rightsquigarrow$ ribalto alto basso

$f(-x) \rightsquigarrow$ ribalto dx / sx

$-f(-x) \rightsquigarrow$ ribalto risp. origine

$|f(x)| \rightsquigarrow$ ribalto parti sotto asse x (parti negative)

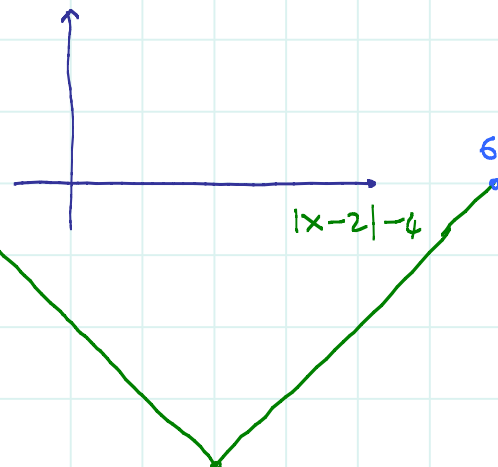
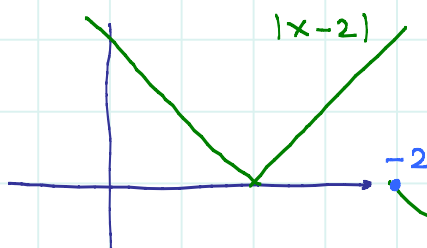
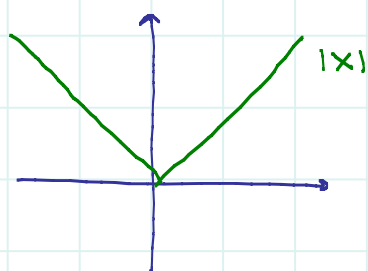
$f(|x|) \rightsquigarrow$ per $x \geq 0$ non succede nulla e poi è diventata pari

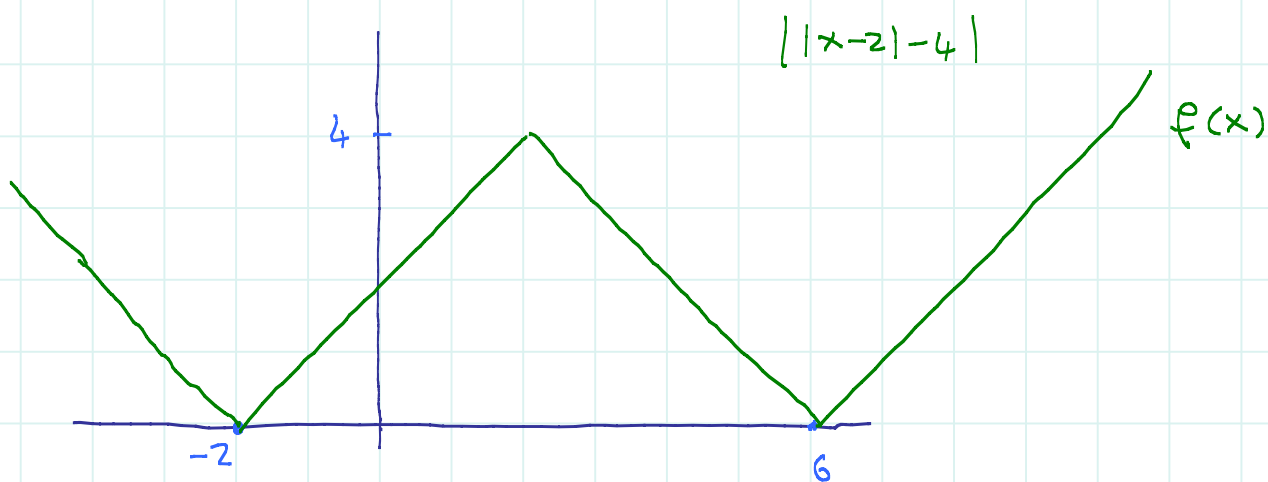
Oss. Risolvere $f(x) = \lambda \leftarrow$ numero dato vuol dire intersecare il grafico di $f(x)$ con la retta $y = \lambda$ e prendere le coord. x dei p.ti di intersezione

Esercizio Determinare, al variare di λ , il numero di soluzioni dell'equazione

$$\underbrace{||x-2|-4|}_{f(x)} = \lambda$$

Trovo il grafico di $f(x)$.



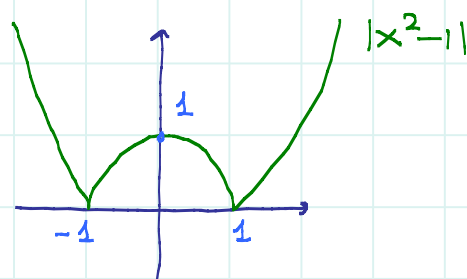
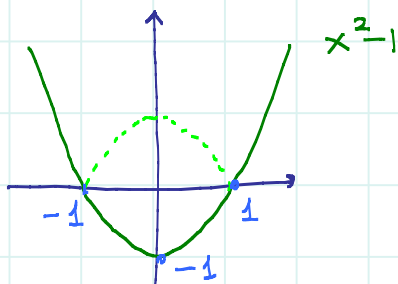
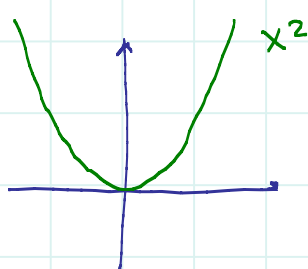


Risolvere $f(x) = \lambda$ vuol dire intersecare ...

- se $\lambda < 0 \rightsquigarrow 0$ sol.
- se $\lambda = 0 \rightsquigarrow 2$ sol. ($x = -2$ e $x = 6$)
- se $0 < \lambda < 4 \rightsquigarrow 4$ sol.
- se $\lambda = 4 \rightsquigarrow 3$ sol. ($x = 2, -6, 10$)
- se $\lambda > 4 \rightsquigarrow 2$ sol.

Esercizio 2

$$|x^2 - 1| = \lambda$$



0 soluzioni se $\lambda < 0$

2 soluzioni se $\lambda \in \{0\} \cup (1, +\infty)$

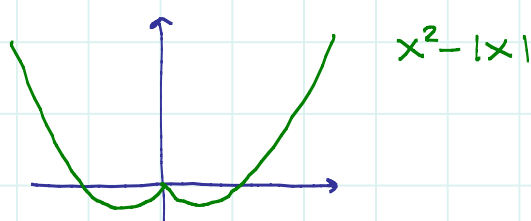
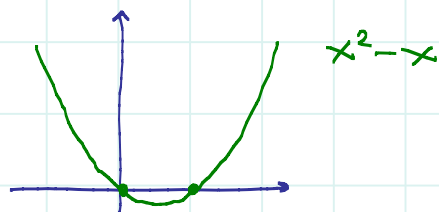
3 sol. se $\lambda = 1$

4 sol. se $\lambda \in (0, 1)$

Esercizio 3 Disegnare $f(x) = x^2 - |x|$

$$f(x) = |x|^2 - |x|$$

Per $x \geq 0$ è $f(x) = x^2 - x$



GRANDI TENTAZIONI

$$\cancel{3}^{2x+1} = \cancel{3}^{x+4}$$

SI

$$\leadsto 2x+1 = x+4 \leadsto x=3$$

$$\cancel{\log}_5(3x+1) = \cancel{\log}_5(x+4)$$

NO $\nwarrow$ posso eliminare ma devo verificare che la soluzione rientri nella zona di esistenza

$$\cancel{\cos}(3x+1) = \cancel{\cos}(x+4)$$

NO

In generale $f(\text{CANE}) = f(\text{GATTO}) \Leftrightarrow \text{CANE} = \text{GATTO}$ è ok

Se f è INIETTIVA e CANE e GATTO stanno nella zona di defn.

Con le disuguaglianze, il passaggio

$\cancel{f}(A) > \cancel{f}(B) \Rightarrow A > B$ è ok se f è debolmente crescente

(se per assurdo fosse $A \leq B$, allora sarebbe $f(A) \leq f(B)$ per deb. decr.)

Serve anche che A e B siano nella zona di definizione

$\cancel{f}(A) \geq \cancel{f}(B) \Rightarrow A \geq B$ è ok se f è strett. crescente

(se per assurdo fosse $A < B$, allora sarebbe $f(A) < f(B)$)

(nota bene: in un tratto piatto del grafico abbiamo $f(A) = f(B)$ ma possiamo scambiare A e B e quindi non sappiamo il più grande)

Quindi: se f è strett. cresc. allora $f(A) > f(B) \Leftrightarrow A > B$

$$f(A) \geq f(B) \Leftrightarrow A \geq B$$

quindi possiamo sempre eliminare f (se A e B stanno nella zona...)

Con le strett. decr. è analogo, ma si invertono le disuguaglianze.

IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Esercizio $f(x) = x^2$. Calcolare $f([-1, 2])$ e $f^{-1}([-1, 2])$

Ricordiamo le definizioni

$$f([-1, 2]) = \{ x^2 : x \in [-1, 2] \}$$

$$f^{-1}([-1, 2]) = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-1, 2] \}$$

$f([-1, 2]) \rightsquigarrow$ IMMAGINE

→ Disegno $[-1, 2]$ sull'asse x

→ Lo porto sul grafico

→ Proietto il risultato sull'asse y

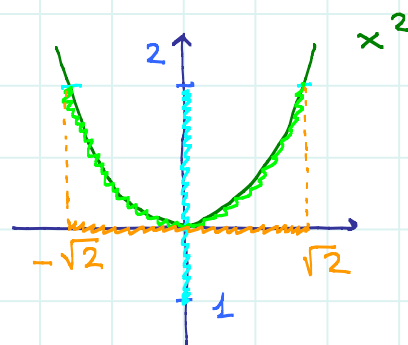


$f^{-1}([-1, 2]) \rightsquigarrow$ CONTROIMMAGINE

→ Disegno $[-1, 2]$ sull'asse y

→ Lo porto sul grafico

→ Proietto sull'asse x



Quindi $f([-1, 2]) = [0, 4]$ e $f^{-1}([-1, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Analogamente: $f([-2, -1]) = [1, 4]$ e $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$

INIETTIVITA' E SURG. DAL GRAFICO

Supponiamo di avere $f: A \rightarrow B$
con $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$

- f è surgettiva se, per ogni $\lambda \in B$, il grafico interseca la retta $y = \lambda$ (le altre non ci interessano)
- f è iniettiva se, per ogni $\lambda \in B$, il grafico interseca la retta $y = \lambda$ al massimo una volta con $x \in A$ (le altre intersezioni non ci interessano).

— o — o —