

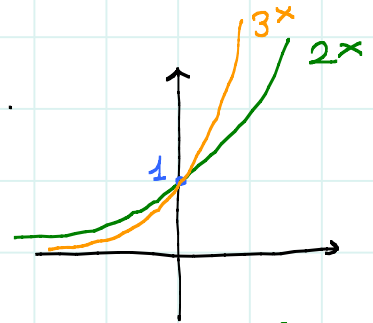
FUNZIONI ESPONENZIALI $f(x) = a^x$ con a fissato**CASO $a > 1$**

Sia a un numero reale > 1 . Allora l'esponenziale, come $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è strett. cresc., iniettiva e surgettiva.

La funzione inversa

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{è } g(x) = \log_a x.$$

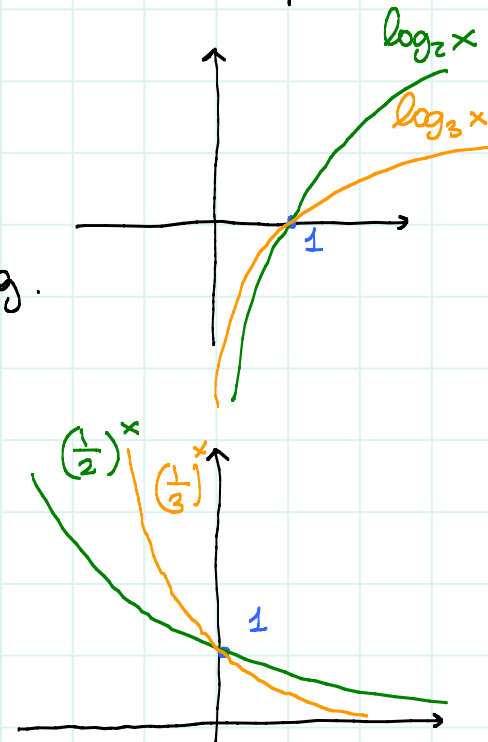
**CASO $0 < a < 1$**

Ora l'esponenziale, visto come $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è strett. decr., iniettiva e surg.

Come prima l'inversa è

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{è } g(x) = \log_a x$$



Nota bene : $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, quindi

il grafico di $(\frac{1}{2})^x$ è il simm. risp. asse y di quello di 2^x .

Come si definisce l'esponenziale?

Ci sono vari modi, quello più elementare passa attraverso una eq. funzionale

Teorema (Misterioso) Sia $a > 0$ un numero reale.

Allora esiste un'unica funzione $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

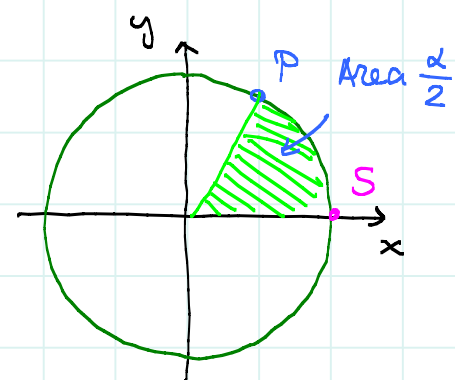
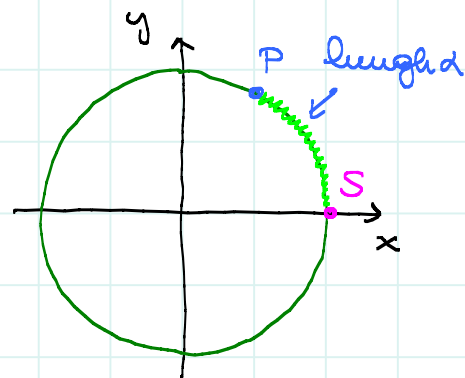
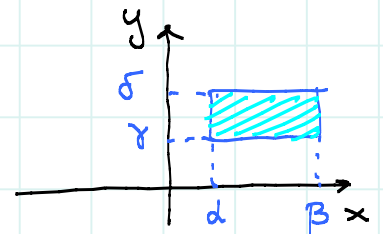
$$(P1) \quad f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$(P2) \quad f_a(1) = a$$

Le prime due proprietà bastano per definire un'unica funzione $f_a: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, ma non bastano per estenderla ad $\mathbb{R}$

(P3) Qualcosa che impedisca patologie estreme, tipo che esiste un rettangolo $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ contenuto nel semipiano $y \geq 0$ che non contiene p.ti del grafico di f_a

Quest'unica funzione ha le proprietà di monotonia, iniettività e surgettività descritte prima.



FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Consideriamo la circ. trigo. $x^2 + y^2 = 1$.

Un p.to P della circ. lo possiamo descrivere

→ mediante la lunghezza dell'arco da S a P

→ mediante l'area del settore in figura

[Solite conversioni per α negativi o fuori da $[0, 2\pi]$]

A questo punto

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$\nearrow$
 $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$
definite per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

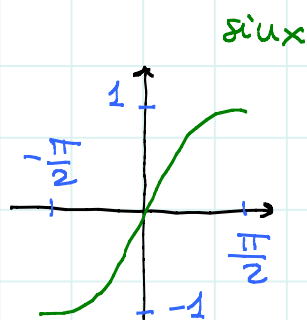
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$\uparrow$
 $\tan \alpha$ definita solo
quando $\cos \alpha \neq 0$.

SENO La funzione $f(x) = \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari e periodica con periodo minimo 2π .
Vista come $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ è strett. cresc., iniettiva e surg.

Quindi ha un'inversa

$$g: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



che si indica con $g(x) = \arcsin x$

COSENO ... $f(x) = \cos x$... $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari e periodica ... 2π .

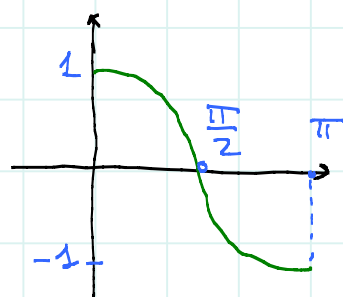
Vista come $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è strett. decr., iniettiva e surg.

La sua inversa è

$$g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

e si indica con

$$g(x) = \arccos x$$



TANGENTE Definita quando $\cos \neq 0$, cioè per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Funzione dispari e periodica di periodo minimo π (senza il 2)

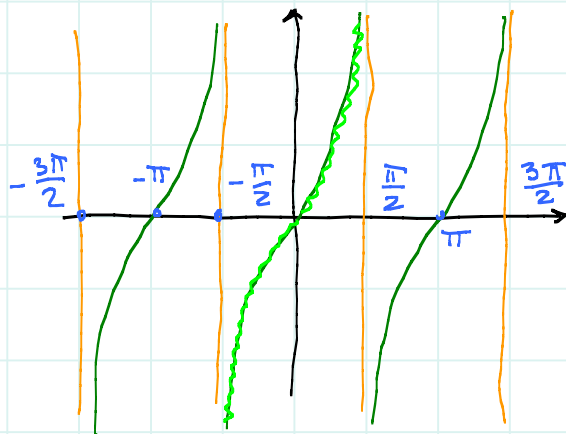
Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è strett. cresc., iniettiva e surgettiva, quindi invertibile.

L'inversa è una

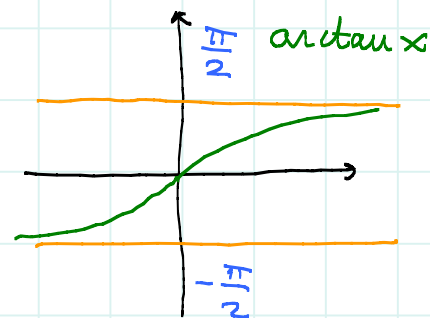
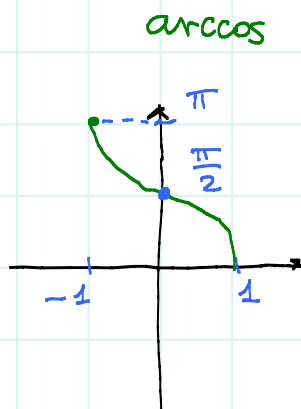
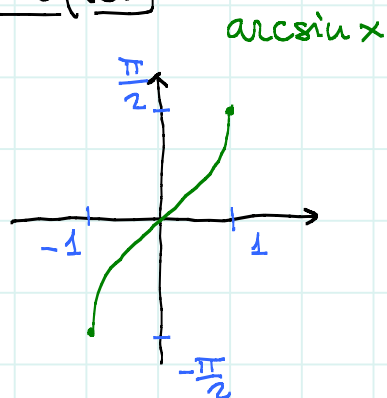
$$g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

e si indica con

$$g(x) = \arctan x$$

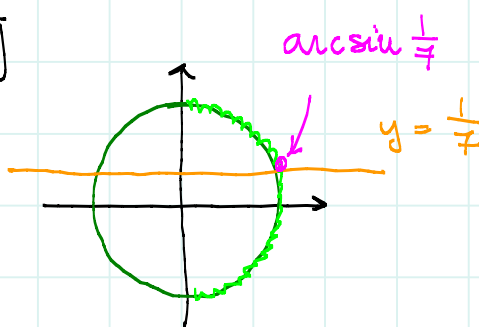


Grafici



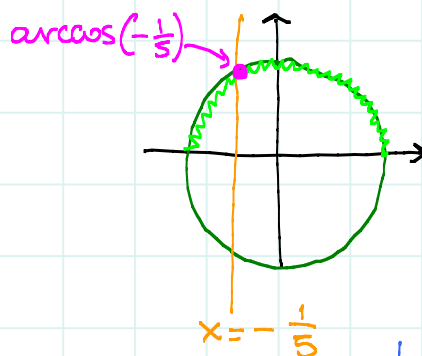
Interpretazione nel cerchio

$$\arcsin \frac{1}{7}$$



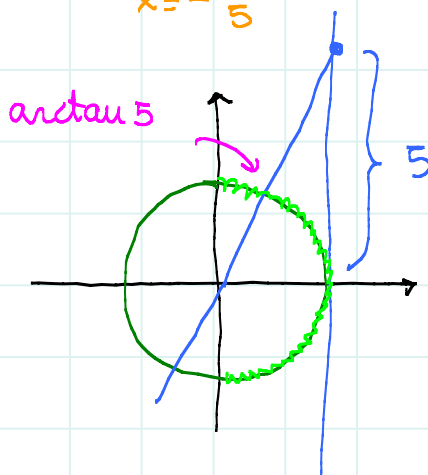
In generale traccio la
retta $y = \dots$ e prendo l'intersezione a dx.

$$\arccos(-\frac{1}{5})$$



$x = \dots$ e prendo
l'intersezione in alto

$$\arctan(5)$$



ACHTUNG

Occhio a semplificare le funzioni con le loro
inverse!

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow A \text{ inversa}$$

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

Quivali

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\forall x \in [0, +\infty)$$

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

$$\forall x \in [0, +\infty)$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1]$$

$$\arctan(\tan x) = x$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Esercizio Quanto vale $\arccos(\cos 4)$?

Di sicuro non è 4...

— 0 — 0 —