

## FUNZIONI REALI E LORO GRAFICI

Setting. Funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o più in generale  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto.

## PROPRIETÀ DI SIMMETRIA

Def. La funzione  $f$  si dice

- **PARI** se  $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **DISPARI** se  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **PERIODICA** se  
 $\exists p > 0$  <sup>periodo</sup> t.c.  $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Oss. Se  $f$  è periodica con periodo  $p$ , allora è anche periodica con periodo  $2p, 3p, \dots$

Se esiste un minimo  $p$  per cui vale la proprietà, allora quello si chiama periodo minimo.

Patologie ① Non è detto che esista un periodo minimo!

Esempio classico

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si verifica che ogni  $p \in \mathbb{Q}$  con  $p > 0$  è un periodo!

② (Hanol) Esistono due funzioni periodiche

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tali che

$$f(x) + g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

### Interpretazione con i grafici

- $f$  pari  $\leadsto$  grafico simm. risp. asse  $y$
- $f$  dispari  $\leadsto$  " " " all'origine
- $f$  periodica di periodo  $p \leadsto$  il pezzo di grafico con  $x \in [0, p]$  si ripete per traslazione prima e dopo

Oss. Se  $f$  è periodica o pari, diciamo addio all'injectività.

### PROPRIETÀ DI MONOTONIA

Solito setting  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Si dice che  $f$  è

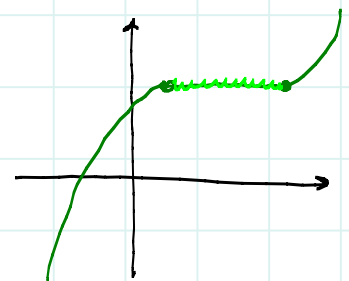
- |                          |                                    |
|--------------------------|------------------------------------|
| • Strettamente crescente | $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$    |
| • Debolmente crescente   | $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ |
| • Strett. decrescente    | $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$    |
| • Debolm. decrescente    | $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ |

(è sottinteso ovunque  $\forall x \in D \forall y \in D$ )

In tutti questi casi la funzione si dice monotona.

Oss. La monotonia stretta (strett. cresc. o strett. decr.)  
implica l'INJECTIVITÀ (è cond. suff., ma non necessaria)

Oss. In termini di grafico una funz.  
debolm. crescente può avere dei  
tratti piatti



Oss.  $f$  strett. cresc.  $\Rightarrow f$  debolm. cresc.  
 $f$  " decr.  $\Rightarrow f$  " decr.  
— 0 — 0 —

## PRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

- potenze ( $\times$  alla base)
- esponenziali ( $\times$  all'esponente o entrambi)
- valore assoluto
- funzioni trigonometriche

**POTENZE**  $f(x) = x^k$  con  $k$  intero positivo

**K PARI** Per ogni  $k$  positivo pari, la funzione  $f(x) = x^k$ ,  
vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è

- pari
- non iniettiva (pari) e non surgettiva (non prende i negat.)
- Vista come  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  è
- strett. cresc., quindi iniettiva
- surgettiva.

Di conseguenza, esiste la funzione inversa

$$g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

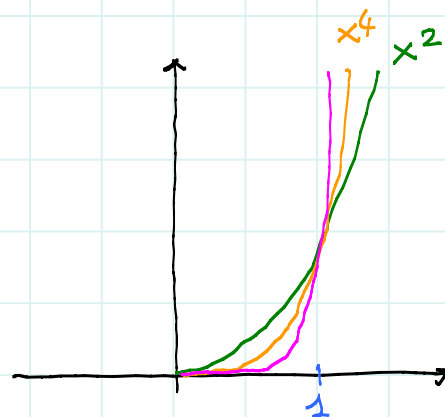
e si chiama radice  $k$ -esima  $g(x) = \sqrt[k]{x}$

Oss. Le radici di ordine  $k$  pari hanno

INPUT  $\rightsquigarrow$  reale  $\geq 0$

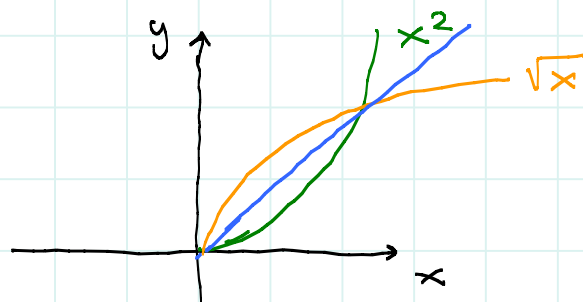
OUTPUT  $\rightsquigarrow$  reale  $\geq 0$ .

Oss. Vedi grafici comparati a lato



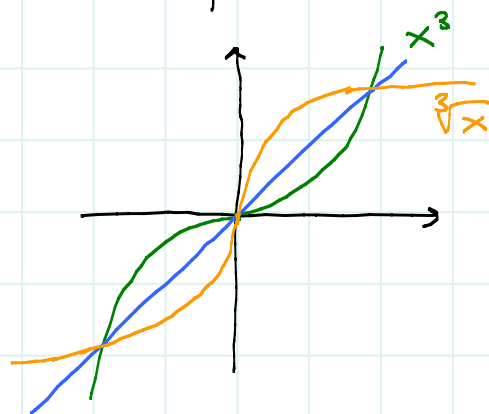
Fatto generale Se  $(a, b)$  è grafico di  $f$ , allora  
 $(b, a)$  è grafico dell'inversa di  $f$   
 e viceversa.

Quando siamo su  $\mathbb{R}$  vuol dire che i grafici di  $f$  e dell'inversa  
 sono simm. risp. bisettrice  $y = x$



**K DISPARI** In questo caso  $f(x) = x^k$ , vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 è strett. cresc., iniettiva, surgettiva, quindi invertibile.  
 È anche dispari.

Quindi l'inversa è una  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 (quindi ora in input va bene un reale qualunque)  
 Anche l'inversa è una funzione dispari



Cosa ci sarebbe da dimostrare?

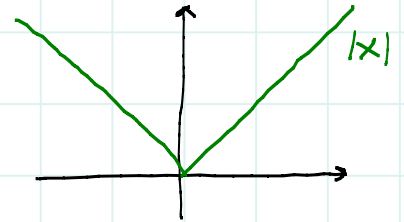
- Le proprietà di simmetria seguono dagli assiemi di campo
- Le proprietà di monotonia in  $[0, +\infty)$  seguono dagli assiemi di ordinamento

(se  $x > y > 0$ , allora  $x^2 > xy > y^2$ )  
 $\uparrow$   $\uparrow$   
 ho monot. per  $x$  ho monot. per  $y$

- L'iniettività segue dalla stretta monotonia.
- La surgettività non è per nulla ovvia, e utilizza profondamente le propr. dei numeri reali (serve assioma di continuità, come per dimostrare che  $\sqrt{2}$  esiste)

**VALORE ASSOLUTO** La funzione  $f(x) = |x|$  è definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



Quindi è una funzione **PARI**, quindi pensata come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non è né iniett., né surg.

Proprietà chiave è la **DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE** cioè

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

e la sua amica

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

**Dim amica** Supponiamo  $|x| \geq |y|$  (altrimenti cambio i nomi)  
Uso la triangolare con  $a = x - y$  e  $b = y$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{cioè}$$

$$|x| \leq |x-y| + |y| \quad \text{cioè}$$

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

e abbiamo finito perché

$$||x| - |y|| = |x| - |y| \quad \text{essendo } |x| \geq |y|.$$

— o — o —