

MAGGIORANTI E MINORANTI

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme NON VUOTO.

- Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \leq M$$

(M è una barriera dall'alto)

- Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \geq M$$

Oss. $\rightarrow$ Maggioranti e minoranti NON sono obbligati ad esistere
 $\rightarrow$ Se esistono, di sicuro non sono unici (se M è maggiorante, anche $M + 2025$ lo è)

MASSIMO E MINIMO

Def. Sempre $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

Si dice che M è il massimo di A , e si scrive $M = \max A$ se

- (i) $a \leq M$ per ogni $a \in A$ (M è un maggiorante)
- (ii) $M \in A$

Analogamente, $m = \min A$ se

- (i) $a \geq m \quad \forall a \in A$
- (ii) $m \in A$

- Oss. $\rightarrow$ Max e min NON sono obbligati ad esistere
 $\rightarrow$ Se esistono, sono per forza unici (segue dalla ord-4)
 $\rightarrow$ Il max, se esiste, è il più piccolo tra i maggioranti (idem per il minimo).

ESTREMO INFERIORE E SUPERIORE

Def. di sup Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

(i) Se non esistono maggioranti, diciamo che

$$\sup A = +\infty$$

(ii) Se esiste almeno un maggiorante (dunque ne esistono infiniti) allora si pone

$$\sup A = \min \{ \text{maggioranti di } A \}$$
$$\min \{ x \in \mathbb{R} : \forall a \in A \ a \leq x \}$$

Def. di inf Sia A come sopra.

(i) Se non esistono minoranti, diciamo che

$$\inf A = -\infty$$

(ii) Se esiste almeno un minorante si pone

$$\inf A = \max \{ x \in \mathbb{R} : \forall a \in A \ a \geq x \}$$

Esempio Sia $A = \{ x \in \mathbb{R} : x < 1 \}$

Allora $\inf A = -\infty$ (avrebbe dimostrato)

I maggioranti di A sono tutti i reali ≥ 1 , quindi il loro minimo è 1, quindi $\sup A = 1$.

FATTO FONDAMENTALE Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

Allora $\sup A$ e $\inf A$ esistono per forza (possono essere reali oppure $+\infty$ e $-\infty$) e sono unici.

Brutalmente: $\sup$ e $\inf$ sono coloro che vorrebbero essere $\max$ e $\min$, ma magari non possono.

Dim dell' esistenza del $\sup$ (per l' $\inf$ si fa uguale)

(i) se non esistono maggioranti, l'esistenza del $\sup$ è gratis

(ii) Supponiamo che esista almeno un maggiorante

Chiamiamo B l'insieme dei maggioranti di A .

È evidente che A sta a sx di B (per def. di maggiorante)

Per l'assioma di continuità esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$\rightarrow a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è maggiorante, quindi $c \in B$)

$\rightarrow c \leq b \quad \forall b \in B$ (c è $\leq$ di tutti gli elementi di B)

Quindi per definizione

$$c = \min B$$

ed è lui il $\sup$!

Oss. Può accadere che $c \in A$ ed in tal caso è $\max A$.

Quando esiste $\max A$, quello è automaticamente anche $\sup$.

Oss. ($\sup$ e $\inf$ di $\emptyset$) Due scuole di pensiero

(1) Non se ne parla nemmeno (ma allora occorre sempre verificare che $A \neq \emptyset$ quando si scrive $\sup$ o $\inf$)

(2) Chi sono i maggioranti di $\emptyset$? Tutti i reali!

Potiamo allora $\sup \emptyset = -\infty$ e per lo stesso prezzo

$\inf \emptyset = +\infty$ (però allora dobbiamo accettare $\sup < \inf$)

Qualunque cosa che riguarda davvero i reali si dimostra usando $\sup$ e $\inf$.

Esempio Voglio dimostrare che esiste $c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$ e $c^2 = 2$
Cosa faccio?

Prendo $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$

Dimostro che $B \neq \emptyset$

Prendo $c = \inf B$

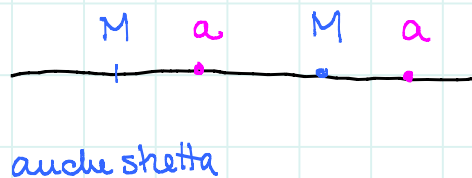
Con fatica dimostro che $c^2 = 2$.

Caratterizzazione di SUP

(1) Si ha che $\sup A = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A \text{ t.c. } a \geq M$$

↑ ogni $M \in \mathbb{R}$ non è maggiorante



(2) Si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

• $a \leq L \quad \forall a \in A$ (cioè L è un maggiorante)

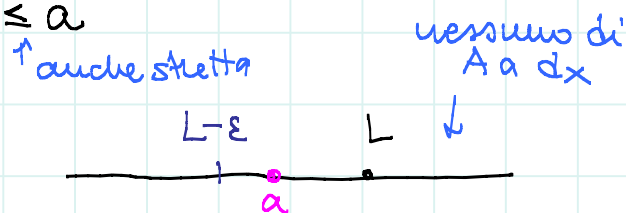
• $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ t.c. } L - \varepsilon \leq a$

↑ se non ci fosse, allora

$L - \varepsilon$ sarebbe maggiorante

e quindi L non sarebbe

il minimo dei maggioranti



Esercizio Discorso analogo per l'inf. [a voce nel video]

Domanda $\sup \mathbb{N}$ (nota $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme $\neq \emptyset$)

Forse $\sup \mathbb{N} = +\infty$?



Devo dimostrare che non esistono maggioranti di $\mathbb{N}$.

Se ce ne fosse uno, avremmo $\sup \mathbb{N} = L \in \mathbb{R}$. Ora prendo

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. Per caratterizzazione esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $L - \frac{1}{2} \leq n$

Ma allora $n+1 \geq L - \frac{1}{2} + 1 = L + \frac{1}{2} > L$ assurdo.

Ho usato che $\frac{1}{2} > 0$ e che $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$. Non sono scritti negli assiomi...