

PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ = numeri naturali
 ↑
c'è anche lei

Sia $P(m)$ un predicato che parla di numeri naturali.

Supponiamo che

(i) $P(0)$ è vera (passo base)

(ii) $\forall m$, se $P(m)$ è vera, allora anche $P(m+1)$ è vera

$\forall m \in \mathbb{N} \quad P(m) \Rightarrow P(m+1)$ (passo induttivo)

Allora $P(m)$ è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$

Variaute : se in (i) metto $P(127)$ è vera, allora la tesi diventa
 $P(m)$ è vera per ogni $m \geq 127$.

Perché funziona? $P(0)$ è vera per la (i)

Se $P(0)$ è vera, allora $P(1)$ è vera [(ii) con $m=0$]

Se $P(1)$ è vera, allora $P(2)$ è vera [(ii) con $m=1$]

... e così via

[visualizzazione con le tessere del domino]

Esempi classici

$$\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Per ogni $a \neq 1$ vale

$$\sum_{k=0}^m a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^m = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}$$

Per $a=1$ viene

$$\sum_{k=0}^m a^k = m+1$$

occhio all' off-by-one

Dim Passo base $m=0$ $1 = \frac{a-1}{a-1}$ ☺

Passo induttivo Hp: $\sum_{k=0}^m a^k = \frac{a^{m+1}-1}{a-1}$

Th: $\sum_{k=0}^{m+1} a^k = \frac{a^{m+2}-1}{a-1}$

Dim Catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} a^k &= \sum_{k=0}^m a^k + a^{m+1} = \frac{a^{m+1}-1}{a-1} + a^{m+1} = \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{separo} \\ \text{termine} \\ (m+1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{uso Hp} \\ \text{induttiva} \end{array} \\ &= \frac{\cancel{a^{m+1}} - 1 + a^{m+2} - \cancel{a^{m+1}}}{a-1} = \frac{a^{m+2}-1}{a-1} \quad \text{☺} \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{precorso} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} 0 \text{ ---} 0 \text{ ---} \end{array} \end{aligned}$$

Esempio 2 Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$n! \geq 2^n$$

Esplorazione:

$n=0$	$\leadsto$	$0! \geq 2^0$	☺
$n=1$	$\leadsto$	$1! \geq 2^1$	☹
$n=2$	$\leadsto$	$2! \geq 2^2 \leadsto 2 \geq 4$	☹
$n=3$	$\leadsto$	$3! \geq 2^3 \leadsto 6 \geq 8$	☹
$n=4$	$\leadsto$	$4! \geq 2^4 \leadsto 24 \geq 16$	☺
$n=5$	$\leadsto$	$5! \geq 2^5 \leadsto 120 \geq 32$	☺

Da qui in poi sembra abbondante.

Congettura: vera per $n=0$ e per $n \geq 4$. Per esclusione

Passo base: $n=4 \leadsto$ fatto sopra

Passo induttivo Hp: $n! \geq 2^n$ Th: $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

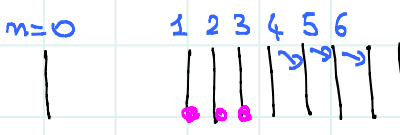
Dim: organizzo catena di disuguaglianze

$$(n+1)! = (n+1) n! \geq (n+1) 2^n \geq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\uparrow$ separo l'ultimo $\uparrow$ Hp uolt. per (n+1) (posso perché $n+1 \geq 0$) $\uparrow$ spero $\uparrow$ percorso

La speranza è verificata per ogni $n \geq 1$, e quindi $\therefore$ (mi bastava per $n \geq 4$).

Disegnino con i domino



→ La tessera con $n=0$ casca, ma è lontana dalle altre

→ Da $n=1$ in poi c'è il meccanismo di caduta, ma $n=1, 2, 3$ sono incollate e non cascano

→ $n=4$ casca e da lì in poi è fatta.

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

Per ogni numero reale $x > -1$ vale la disuguaglianza

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim Per induzione

Passo base $(1+x)^0 \geq 1 \rightsquigarrow 1 \geq 1 \quad \therefore$

Passo induttivo Hp: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Th: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim Corollario di disug:

$$(1+x)^{m+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pecorso}}}{=} (1+x) \cdot (1+x)^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp. mult} \\ \text{per } (1+x)}}{\geq} (1+x)(1+mx)$$

$$\begin{aligned} (\text{cont}) &= 1+mx+x+mx^2 = 1+(m+1)x + \underbrace{mx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(m+1)x \quad \smile \\ &\quad \uparrow \\ &\text{sacrificio addendo } \geq 0 \end{aligned}$$

Oss. Ho usato l'ipotesi $x > -1$ nel momento in cui ho moltiplicato per $(1+x)$ conservando i versi. Qui serve $1+x > 0$, cioè $x > -1$.

Esempio $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq 2 \quad \forall m \geq 1$

Se provo subito per induzione fallisco...

$$\dots \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{Hp}}}{\leq} 2 + \frac{1}{(m+1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{me lo scordo}}}{\leq} 2 \quad \text{NO!}$$

Provo a dimostrare una cosa più difficile, cioè

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq \underbrace{2 - \frac{1}{m}}_{\text{più piccolo di prima}} \quad \forall m \geq 1$$

Questo per induzione riesce!

Passo base : OK $1 \leq 2-1$

Passo induttivo : ...

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso Hp}}}{\leq} 2 - \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\leq} 2 - \frac{1}{m+1} \quad \text{Tesi passo induttivo}$$

Controllo la speranza:

$$\cancel{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \stackrel{?}{\leq} \cancel{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^2} &\stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n(n+1)} && \leadsto n(n+1) \stackrel{?}{\leq} (n+1)^2 \\ &&& \leadsto n^2 + n \stackrel{?}{\geq} n^2 + 2n + 1 \\ &&& \leadsto n+1 \stackrel{?}{\geq} 0 \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Esempio finale $5^n \geq 3^n + 4^n$

Dopo un po' inizia ad essere vera, diciamo per $n \geq 2$.

Passo base: $25 \geq 25$ ☺

Passo induttivo: saltati i convenevoli...

$$\begin{aligned} 5^{n+1} &= 5 \cdot 5^n \geq 5(3^n + 4^n) = 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n \\ &\geq 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n = 3^{n+1} + 4^{n+1} \quad \text{☺} \end{aligned}$$

↑
sacrifico
un po' del 5

— 0 — 0 —