

PREDICATO

Frase che contiene al suo interno dei parametri e a seconda del valore dei parametri può essere vera o falsa (proposizione parametrica)

Esempi1: Lo studente s studia matematica2: Il docente d insegna la materia m 3: $a^2 \geq b$ **QUANTIFICATORI** $\forall$ per ogni $\exists$ esiste ALMENO UN $\exists!$ esiste ed è unico

Quando in un predicato quantifico tutte le variabili ottengo una proposizione

Esempio 1 $\forall s \in \text{Studenti}$ "s studia matematica" F $\exists s \in \text{Studenti}$ "s studia matematica" VEsempio 2 $P(s,b) =$ "allo studente s piace la birra b" $\forall s \exists b$ tale che $P(s,b)$ "A ogni studente piace almeno una birra" $\exists b \forall s P(s,b)$ "Esiste una birra che piace a tutti gli stud." $\forall b \forall s P(s,b)$ "A tutti piacciono tutte le birre"

Domanda In quanti modi posso quantificare un predicato con k parametri?

Esempio 3 $P(a,b) = "a^2 \geq b"$ Con a e b interi positivi

$\forall a \exists b P(a,b)$	$\checkmark$ "una volta visto a posso trovare b "
$\forall b \exists a P(a,b)$	$\checkmark$
$\exists a \exists b P(a,b)$	$\checkmark$ (quasi ovvia)
$\exists a \forall b P(a,b)$	F (a^2 dovrebbe essere più grande di ogni b)
$\exists b \forall a P(a,b)$	$\checkmark$ (basta prendere $b=1$)

NEGARE IN PRESENZA DI QUANTIFICATORI

Sia $P(x)$ un predicato con parametro x

$\text{NOT} (\forall x P(x))$ è come dire $\exists x \text{NOT} P(x)$

$\text{NOT} (\exists x P(x))$ è come dire $\forall x \text{NOT} P(x)$

Esempio 1 Tutte le pecore sono nere

$\forall x \in \text{Pecore} \text{ vale che } \text{Nera}(x)$

Esiste almeno una pecora che non è nera

$\exists x \in \text{Pecore} \text{ tale che } \text{NOT Nera}(x)$

Esempio 2 "Ogni anno c'è almeno uno studente che passa tutti gli esami"

Qual è la negazione?

$\forall a \exists s \forall e \text{ KANNA}(a,s,e)$

$\exists a \forall s \exists e \text{ NOT KANNA}(a,s,e)$

"Almeno in un anno tutti gli studenti passano almeno un esame"

Esempi di implicazioni a è sempre un intero positivo

$$\forall a \quad a > 5 \Rightarrow a^2 \geq 16 \quad \text{Vera}$$

$$\forall a \quad a > 5 \Leftrightarrow a^2 \geq 16 \quad \text{Falsa (basta prendere } a = 4)$$

$$\forall a \quad a > 2a+1 \Rightarrow a < 27 \quad \text{Vera per vuotezza della premessa}$$

INSIEMI Cos'è un insieme? Non lo diremo!

Un insieme lo possiamo presentare

→ per elenco

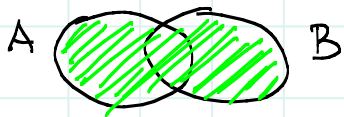
$$A = \{2, 5, \square, \text{👤}\}$$

→ per proprietà

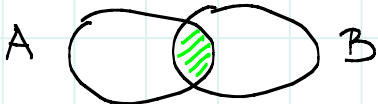
$$A = \{s : \text{"s è studente di matematica"}\}$$

$\uparrow$ variabile $\uparrow$ predicato che parla di quella variabile

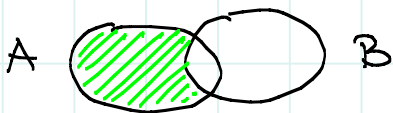
Operazioni tra insiemi



$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ VEL } x \in B\} \quad \text{unione}$$



$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ AND } x \in B\} \quad \text{intersezione}$$



$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ AND } \underline{x \notin B}\} \quad \text{differenza}$$

$\text{NOT } (x \in B)$

Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ AND } b \in B\}$$

Sottoinsiemi

$$A \subseteq B \quad \text{vuol dire} \quad \forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

Occhio al simbolo $A \subset B$ perché non c'è un accordo assoluto

sul suo significato (in alcuni testi è usato al posto di $A \subseteq B$)

Se vogliamo stressare la non uguaglianza scriviamo $A \subsetneq B$

Insieme delle parti Se A è un insieme

$\mathcal{P}(A)$ = insieme dei sottoinsiemi di A

Tra questi c'è sempre anche il vuoto $\emptyset$, cioè $\emptyset \subseteq A$

$$\forall x \quad x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

Esempio $A = \{2, \square\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{\square\}, A\}$

$$A \times A = \{(2, 2), (2, \square), (\square, 2), (\square, \square)\}$$

Occhio: nelle presentazioni per elenco gli elementi ripetuti contano una volta sola, cioè

$$\{2, \square, 2\} = A$$

Esempio Quanti elementi ha $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$? 2!

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Esempio $\mathbb{Z}$ = interi relativi

$$A = \{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{sono i quadrati} \quad 0, 1, 4, 9, \dots$$

↑ per elenco!!!!

"Fai variare n in $\mathbb{Z}$ e scrivi n^2 : così avrai l'elenco di A "

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \underbrace{\exists a \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n = a^2}_{\substack{\text{m\`e il } \square \text{ di qualcosa} \\ \text{— } 0 \text{ — } 0 \text{ —}}}\}$$