



Esercizio 1 Dimostrare che $e \notin \mathbb{Q}$

Dim. Uso la caratterizzazione come somma di una serie.
Supponiamo per assurdo che

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{a}{b} \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ in } \mathbb{N}$$

Moltiplico LHS e RHS per $b!$. Otengo

$$e \cdot b! = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b!}{n!}}_{\text{intero}} = a \cdot (b-1)! \in \mathbb{Z}$$

$$\uparrow$$

$$\text{intero} + \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!}$$

tutti i termini con $n \leq b$ sono diventati interi

quindi in particolare

$$\sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

Ora l'idea è che la sommatoria è positiva e minore di 1, il che è assurdo.

$$\sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots$$

$$\leq \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \dots$$

$$\stackrel{\text{geometrica}}{\geq} \frac{1}{b+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b+1} \cdot \frac{b+1}{b} = \frac{1}{b} < 1 \quad \text{se } b > 1$$

Ora $b > 1$ perché altrimenti $e \in \mathbb{N}$, ma $2 < e < 3$. $\square$

Oss. Quello che rende facile la d'm. è il fatto che c'è la somma di una serie che converge molto rapidamente.

Esercizio 2 Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}$$

dove $A = \{n \geq 1 : n \text{ si scrive in base 10 senza usare la cifra } 7\}$

Sol. La prima converge, che è come dire che sto "saltando" molti numeri.

Provo a fare una maggiorazione. Fisso un numero k di cifre. Quanti sono i numeri di k cifre che si scrivono senza usare il 7?

$$\underbrace{8 \cdot \underbrace{9 \cdot \dots \cdot 9}_{\substack{\uparrow \text{le altre cifre} \\ \text{hanno 9 possib.}}}}_{\substack{\uparrow \text{la cifra a sx} \\ \text{non può essere} \\ 0 \text{ o } 7}} = 8 \cdot 9^{k-1}$$

Cosa posso dire della somma dei loro reciproci?

$$\leq \underbrace{8 \cdot 9^{k-1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{quanti sono} \\ \text{i numeri}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{10^{k-1}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{più grande reciproco} \\ \text{tra quelli di } k \text{ cifre.}}}$$

Quindi
$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 8 \cdot \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} < +\infty$$

 $\uparrow$
geometrica

Osservazione Posso raggruppare i termini a seconda del numero di cifre perché sono tutti positivi.

$$\underbrace{S_n \rightarrow S_{\infty}}_{\substack{\uparrow \\ \text{monotona crescente}}} \Leftrightarrow \text{una qualunque s. succ.} \rightarrow S_{\infty}$$

Cor 2 Arrivo alla stima

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \leq 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha} \right)^{k-1}$$

quindi si ha convergenza se $10^\alpha > 9 \Leftrightarrow \alpha > \log_{10} 9$

Cosa succede per $\alpha < \log_{10} 9$? Posso fare la stima inversa

$$\text{Somma reciproci con } k \text{ cifre} \geq 8 \cdot 9^{k-1} \frac{1}{10^{k\alpha}}$$

$$\text{quindi} \quad \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{8}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha} \right)^k = +\infty$$

Questo dimostra anche il caso $\alpha = \log_{10} 9$

Esercizio 3 $\sum_{n \in P} \frac{1}{n} \quad P = \text{primi}$

Dim 1 Brutal mode via prodotto di Eulero

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right) \\ &= \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Prendo i logaritmi

$$\log \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) = \sum_{p \in P} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) = - \sum_{p \in P} \log \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

Taylor $\nearrow \sum_{p \in P} \frac{1}{p}$

Dim 2: ERDÖS Supponiamo per assurdo che $\sum \frac{1}{p} < +\infty$

Allora numerati i primi $p_1, p_2, \dots$, avremo che $\exists k$ t.c.

$$\sum_{n \geq k+1} \frac{1}{p_n} < \left(\frac{1}{2}\right) \leftarrow \text{basta qualunque cosa} < 1.$$

Chiamo $p_1, \dots, p_k$ i primi piccoli

Chiamo $p_{k+1}, \dots$ i primi grandi

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definisco

$A_n = \{ i \in \{1, \dots, n\} \text{ che hanno solo primi piccoli} \}$

$B_n = \{ i \in \{1, \dots, n\} \text{ che hanno almeno un primo grande} \}$

Ovviamente $|A_n| + |B_n| = n$

Dimostrerò invece che

$$|B_n| \leq \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad |A_n| = \underbrace{O(\log_2^k n)}_{\leq \frac{n}{4} \text{ definitivamente}}$$

→ Dimostro la stima per $|A_n|$. Ogni elemento di A_n si scrive nella forma

$$p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

Tutti gli esponenti sono più piccoli di $\log_{p_i} n \leq \log_2 n$

Avevamo k esponenti tutti $\leq \log_2 n$, per forza le possibilità sono meno di $(\log_2 n)^k$

→ Dimostro la stima su B_n osservando che

$$B_n = \bigcup_{i \geq k+1} \{ \text{numeri divisibili per } p_i \}$$

$$|B_n| \leq \sum_{i \geq k+1} |\{ \text{numeri divisibili per } p_i \}| \leq \sum_{i \geq k+1} \frac{n}{p_i}$$

Quindi

$$|B_n| \leq n \sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} \leq \frac{n}{2}.$$

Oss. La prima dir. aggiustata conduce alla somma $\log(\log n)$
La seconda non è costruttiva, quindi non permette
di stimare come divergono le somme parziali.

FINE CORSO !!!