

Dimenticare del passato1°: Dim. di Hôpital nel caso $x_0 = \pm \infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{pongo } y = \frac{1}{x} \end{array} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right) \left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right) \left(-\frac{1}{y^2}\right)} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{se posso} \\ \text{usare Hôp} \end{array} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{cambio} \\ \text{inverso} \end{array}
 \end{aligned}$$

Quindi la dim. si riduce al caso 0^+ o 0^- .2°: Dim. derivata funzione compostaEnunciato: $f(x)$ derivabile in x_0 $g(x)$ derivabile in $y_0 = f(x_0)$ Allora $g(f(x))$ è derivabile in x_0 e vale

$$\frac{d}{dx} g \circ f(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Dim. brutale Rapporto incrementale

$$\begin{aligned}
 \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} &= \frac{g\left(\underbrace{f(x_0+h)}_{y}\right) - g\left(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}\right)}{\underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}_{y - y_0}} \\
 &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \\
 &\downarrow \\
 &g'(y_0) = g'(f(x_0))
 \end{aligned}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \downarrow f'(x_0)$$

Problema: aver diviso per $f(x_0+h) - f(x_0)$, che potrebbe essere 0.

Oss. Se $f'(x_0) \neq 0$, allora la dim. di sopra funziona, perché per permanenza del segno avremo $f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0$ per h vicino abbastanza vicino a 0.

Dim. funzionante 1 Definisco la funzione

$$R(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

Osservo che $R(y)$ è definita almeno in un intorno di y_0 ed è continua in y_0 (è equivalente alla derivabilità di $g(y)$ in $y = y_0$).

Ora

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = R(f(x_0+h)) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Infatti:

- se $f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0$ segue come prima
- se $f(x_0+h) = f(x_0)$ diventa $0 = 0$.

Calcolo il limite del LHS usando il prodotto di limiti.

Il primo termine al RHS $\rightarrow g'(y_0)$ il secondo a $f'(x_0)$.
— 0 — 0 —

Dim. funzionante 2 Uso il Lemma della sotto-sotto.

Devo dimostrare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

" $\varphi(h)$

Il lemma mi dice che basta verificare che ogni successione $R_n \rightarrow 0$ ha una sottosuccessione R_{n_k} tale che

$$\varphi(R_{n_k}) \rightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Prendiamo ora una qualunque succ. $R_n \rightarrow 0$. Questa avrà una sottosuccessione che verifichi una delle seguenti due proprietà

- caso 1: $f(x_0 + R_{n_k}) \neq f(x_0)$ per ogni k . In questo caso divido come nella dim. sbagliata e concludo.
- caso 2: $f(x_0 + R_{n_k}) = f(x_0)$ per ogni k .
In questo caso $\varphi(R_{n_k}) = 0$, quindi $LHS \rightarrow 0$, ma anche

$$f'(x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + R_{n_k}) - f(x_0)}{R_{n_k}} = 0,$$

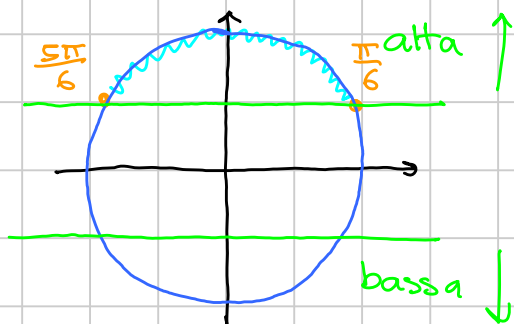
quindi anche $RHS \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —

Esercizio (versione soft) Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n$ N.E.

NON pensare nemmeno: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ N.E., quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n$ N.E.

Devo trovare due sottosuccessioni con 2 comportamenti diversi.

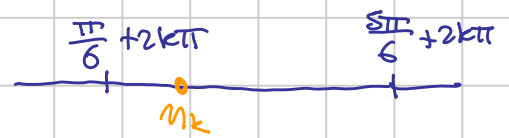


Idea: il p.to della circ. corrispondente ad n radianti sta infinite volte in zona alta e infinite volte in zona bassa.

Lemma Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste n_k tale che

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq n_k \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (\text{e quindi } \sin n_k \geq \frac{1}{2})$$

Dim. Basta osservare che la finestra ha ampiezza $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 2$



Perché? Considero l'insieme

$$\{n \in \mathbb{N} : n \geq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$$

$\uparrow$ k è fissato

L'insieme è non vuoto per la proprietà archimedeica.

Sia i_k l'inf. Allora $n_k = i_k - 1$ sta nella zona

Se fosse sopra...

Se stesso sotto... $\square$

All'estremo si dimostra che esiste $n_k \rightarrow +\infty$ che sta nella zona sotto.

— 0 — 0 —

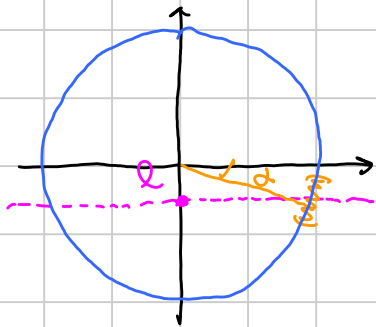
Versione Hard

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sin n = -1$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sin n = 1$$

o ancora meglio: per ogni $l \in [-1, 1]$ esiste $n_k \rightarrow +\infty$ tale che

$$\sin n_k \rightarrow l$$

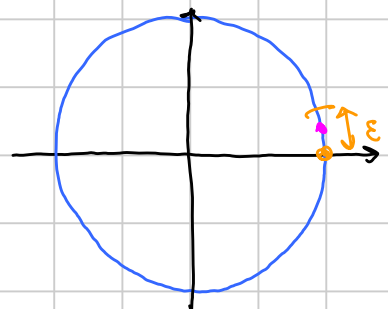


Si riduce a dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, la successione n , vista modulo 2π , entra in una finestra di ampiezza ε centrata in un punto α

Fatto misterioso

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono infiniti interi n_k tali che

$$2k\pi < n_k < 2k\pi + \varepsilon$$



Supponendo per buono il fatto misterioso, si conclude.

Basta considerare un k_0 di questo tipo e i suoi multipli

$$k_0, 2k_0, 3k_0, \dots, mk_0, \dots$$

Data una finestra di ampiezza ε a dx e sx intorno ad un valore α , questi finiranno infinite volte nella finestra.

— o — o —

A sua volta il fatto misterioso è equivalente a scrivere

$$\pi < \frac{m_k}{2k} < \pi + \frac{\varepsilon}{2k}$$

che è equivalente a

$$\left| \pi - \underbrace{\frac{m_k}{2k}}_{\in \mathbb{Q}} \right| < \frac{\varepsilon}{2k}$$

cioè ad approssimare π con una frazione commettendo un errore minore di ε diviso il denominatore.

Lemma Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, allora per ogni $n \geq 1$ esiste una frazione $\frac{p}{q}$ tale che

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}$$

Preso $\frac{1}{n} < \varepsilon$, questo dimostra il fatto misterioso

Esempio $\pi = 3,14159\dots$ si può approssimare con $\frac{22}{7} = 3,1428\dots$.
In generale si possono trovare approssimazioni dell'ordine di $\frac{1}{q^2}$.

Esercizio per casa 😊 Dimostrare che $\sin(n^2)$ non ha limite e calcolare $\liminf$ e $\limsup$ (problema forse aperto)

— o — o —