

Serie numeriche $\leadsto$ proprietà di riordinamento

Data una serie, se "permuto" i termini, cosa succede alla somma?

Formalizziamo il discorso: sia a_n una successione di numeri, e sia

$$\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

una funzione iniettiva e surgettiva (una permutazione di $\mathbb{N}$).

Come sono legate le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

Risposta: DIPENDE, in particolare

① Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, cioè se $\sum a_n$ converge assolutamente, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad \forall \sigma \text{ perm. di } \mathbb{N}$$

② Se $\sum a_n$ converge, ma $\sum |a_n| = +\infty$, allora

per ogni $l \in \mathbb{R}$ esiste $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ iniett. e surg. tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = l$$

Idea della dim. di ② Dall'ipotesi segue subito che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max\{a_n, 0\} = +\infty$$

somma termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, 0\} = -\infty$$

somma termini negativi

Supponiamo di voler riordinare i termini in modo che la somma faccia $l \in \mathbb{R}$.

Idea:

- uso i positivi fino a quando supero l (somma pars. $> l$)
- poi uso i negativi fino a quando somma pars. $< l$
- ... e così via.

Otengo infinite alternanze, quindi prima o poi uso tutti i termini. Inoltre quando supero l da una parte o dall'altra l'errore è $\leq$ del più grande termine rimasto fino a quel momento, ma questo $\rightarrow$ perché la serie converge.

— 0 — 0 —

Osservazione Allo stesso modo posso renderla indeterminata, scegliendo come mi pare liminf e limsup delle somme parziali.

— 0 — 0 —

Dim. ① Per ipotesi sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S_{\infty} \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e fisso la permutazione $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Voglio dimostrare che

$$\left| \sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)} - S_{\infty} \right| \leq \varepsilon$$

quando N è abbastanza grande.

Dall'ipotesi segue che

$$\left| \sum_{n=0}^k a_n - S_{\infty} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } k \geq K_{\varepsilon}$$

e

$$\sum_{n=R}^{+\infty} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } R \geq H_{\varepsilon}$$

Pougo $M_\varepsilon := \max \{K_\varepsilon, M_\varepsilon\}$.

Pougo

$N_{\varepsilon, \sigma}$ in maniera tale che

$\sigma(\{1, \dots, N_{\varepsilon, \sigma}\}) \supseteq \{1, \dots, M_\varepsilon\}$ (voglio che tutti i numeri da 1 a M_ε siano permutazione di $\{1, \dots, N_{\varepsilon, \sigma}\}$)

Dato $N \geq N_{\varepsilon, \sigma}$ pougo infine

$U_{\varepsilon, \sigma, N} = \{m \in \{1, \dots, N\} \text{ t.c. } \sigma(m) \in \{1, \dots, M_\varepsilon\}\}$
↑
utili

$I_{\varepsilon, \sigma, N} = \{m \in \{1, \dots, N\} \text{ t.c. } \sigma(m) \geq M_{\varepsilon+1}\}$
↑
inutili

Allora

$$\left| \sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)} - S_\infty \right| = \left| \sum_{n \in U_{\varepsilon, \sigma, N}} a_{\sigma(n)} + \sum_{n \in I_{\varepsilon, \sigma, N}} a_{\sigma(n)} - S_\infty \right|$$
$$= \left| \sum_{n=1}^{M_\varepsilon} a_n + \sum_{n \in I_{\varepsilon, \sigma, N}} a_{\sigma(n)} - S_\infty \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{M_\varepsilon} a_n - S_\infty \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ perché } M_\varepsilon \geq K_\varepsilon} + \left| \sum_{n \in I_{\varepsilon, \sigma, N}} a_{\sigma(n)} \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n \in I_{\varepsilon, \sigma, N}} |a_{\sigma(n)}|$$

↑
tutti indici $\geq M_{\varepsilon+1}$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n \geq M_{\varepsilon+1}} |a_n|$$

← perché $M_\varepsilon \geq K_\varepsilon$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

— o — o —

Conseguenza Si può parlare di somma di un insieme (numerabile) di numeri reali senza precisare l'ordine in cui li sto prendendo se e solo se la somma dei valori assoluti converge.

— o — o —

Proprietà associativa per le serie

Se la serie non converge assolutamente, allora non si può fare nulla.

Se è assolutamente convergente, posso raggruppare i termini come voglio.

Enunciato Sia a_n una successione tale che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

Siano $A_i \subseteq \mathbb{N}$ insiemi a 2 a 2 disgiunti tali che

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N} \quad (\text{gli } A_i \text{ sono una partizione di } \mathbb{N})$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n \in A_i} a_n \right)$$

la somma di tutti i
termini con indici in A_i

↑

l'ordine in cui li sommo non
conta nulla essendo assol. conv.

Dim. Le notazioni sono scomode, ma l'idea è la stessa di prima, quindi esercizio !!!

— o — o —