

Teorema (Freccia difficile del confronto Riemann-Darboux)

Sia f come sempre (limitata e nulla fuori da un intervallo).

Supponiamo che f sia integrabile alla Darboux.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(f, P, T) \right| \leq \varepsilon$$

per ogni partizione P di diametro $\leq \delta$.

Dim. Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare δ .

Poiché f è integrabile alla Darboux, esiste una partizione P_ε che ragloba $[a, b]$ tale che

$$I_D^+(f, P_\varepsilon) - I_D^-(f, P_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

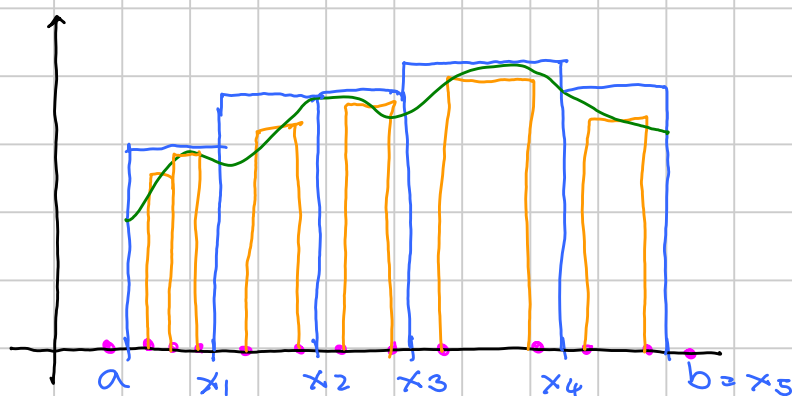
Sia n_ε il numero di p.ti di P_ε . È facile vedere che posso anche assumere che sia

$$x_0 = a$$

$$x_{n_\varepsilon} = b$$

Pongo $\delta := \frac{\varepsilon}{2(n+1)M}$ $|f(x)| \leq M$ ovunque

e sostengo che ogni partizione taggata P, T con $\text{diam}(P) \leq \delta$ produce un errore $\leq \varepsilon$.



La partizione P ha estremi $y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m$

Suddivido i p.ti di P in due categorie

$I_{ut} = \{i \in \{1, \dots, m\} \text{ t.c. } (y_{i-1}, y_i) \text{ sta in uno stesso intervallo della partizione } P_\varepsilon\}$

$C_{av} = \{i \in \{1, \dots, m\} \text{ t.c. } (y_{i-1}, y_i) \text{ sta a cavallo tra 2 o pi\`u intervalli della } P_\varepsilon\}$

$$S(f, P, T) = \sum_{i=1}^m (y_i - y_{i-1}) f(t_i)$$

$$= \underbrace{\sum_{i \in I_{ut}} (y_i - y_{i-1}) f(t_i)}_{\text{somma aree arancioni}} + \underbrace{\sum_{i \in C_{av}} (y_i - y_{i-1}) f(t_i)}_{\text{numero dei pezzi a cavallo}}$$

$$\leq I_D^+(f, P_\varepsilon) \leq (n_\varepsilon + 1) \delta M$$

$\uparrow$ $\leq I_D^+(f, P_\varepsilon)$ $\uparrow$ numero dei pezzi a cavallo $\uparrow$ diametro $\uparrow$ $|f(x)| \leq M$ ovunque

$$\leq I_D^+(f, P_\varepsilon) + (n_\varepsilon + 1) \delta M$$

Ragionando analogamente dal basso, otteniamo

$$S(f, P, T) \geq I_D^-(f, P_\varepsilon) - (n_\varepsilon + 1) \delta M.$$

Ma allora

$$\int_a^b f(x) dx - S(f, P, T) \leq \underbrace{I_D^+(f, P_\varepsilon) - I_D^-(f, P_\varepsilon)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{(n_\varepsilon + 1) \delta M}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

se $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2M(n_\varepsilon + 1)}$

In modo del tutto analogo si ottiene

$$\int_a^b f(x) dx - S(f, P, T) \geq \underbrace{I_D^-(f, P_\varepsilon) - I_D^+(f, P_\varepsilon)}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} - \underbrace{(n_\varepsilon + 1) \delta M}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} \geq -\varepsilon.$$

Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili su $[a, b]$.

Come si dimostra che $f(x) \cdot g(x)$ è integrabile?

Lemma Siano a, b, c, d numeri reali tali che
 $a \leq b$ e $c \leq d$.

Allora

$$\max\{b, d\} - \max\{a, c\} \leq (b+d) - (a+c)$$

Dim. wlog $d \geq b$ (altrimenti scambio le coppie)

Distinguo 2 casi

• Se $a \geq c$, allora

$$\text{LHS} = d - a \leq (d - a) + \underbrace{(b - c)}_{\geq 0 \text{ perché } b \geq a \geq c}$$

$\uparrow$ Hp $\uparrow$ caso

• Se $a \leq c$, allora

$$\text{LHS} = d - c \leq (d - c) + \underbrace{(b - a)}_{\geq 0 \text{ perché } b \geq a}$$

— o — o —

Dim. che $\max\{f(x), g(x)\}$ è integrabile

Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili. Siano $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x) \in SF$ tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente $\psi_1(x) \leq g(x) \leq \psi_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} (\psi_1(x) - \psi_2(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posso supporre che tutte arrivino dalla stessa partizione.

Ora si ha che

$$\underbrace{\max \{ \varphi_1(x), \psi_1(x) \}}_{g_1(x)} \leq \max \{ f(x), g(x) \} \leq \underbrace{\max \{ \varphi_2(x), \psi_2(x) \}}_{g_2(x)}$$

e per il lemma

$$\begin{aligned} \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx &\leq \int_a^b [(\varphi_2 + \psi_2) - (\varphi_1 + \psi_1)] dx \\ &= \int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1) dx + \int_a^b (\psi_2 - \psi_1) dx \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_0 + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_0 \end{aligned}$$

Conseguenza immediata:

$f(x)$ int. secondo Riemann $\Rightarrow |f(x)|$ int. ...

Dim. $|f(x)| = \max \{ f(x), -f(x) \}.$

— 0 — 0 —

Integrabilità del prodotto

Dim. Siano $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$
 $\psi_1 \leq g \leq \psi_2$

come prima. Se fossero tutte positive (cioè $\varphi_1 \geq 0, \psi_1 \geq 0$)
potrei scrivere

$$\varphi_1 \psi_1 \leq f g \leq \varphi_2 \psi_2$$

e stimare la differenza

$$\begin{aligned} \int (\varphi_2 \psi_2 - \varphi_1 \psi_1) dx &= \int (\varphi_2 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 + \varphi_2 \psi_1 - \varphi_1 \psi_1) dx \\ &= \underbrace{\int \varphi_2 (\psi_2 - \psi_1)}_{\leq M} + \underbrace{\int \psi_1 (\varphi_2 - \varphi_1)}_{\leq M} \end{aligned}$$

$$\leq M \left\{ \underbrace{\int (\varphi_2 - \varphi_1)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int (\varphi_2 - \varphi_1)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \right\}$$

$$\leq M\varepsilon$$

Quindi ho trovato funzioni SF sopra e sotto f con integrali vicini a piacere.

Se fossero tutte e 2 negative uso cambia segno.

Se fossero $+$ e $-$, raccolgo un segno $-$ e ho il prodotto di due $+$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ cambiano segno, basta scrivere

$$f(x) = \underbrace{\max\{f(x), 0\}}_{f_1(x)} + \underbrace{\min\{f(x), 0\}}_{f_2(x)}$$

e analogamente

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

Quindi $f(x) \cdot g(x)$ è somma di 4 prodotti in cui i fattori hanno segno fisso.

— 0 — 0 —