

FORMULA DI STIRLING

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(il rapporto tende a 1)

PRODOTTO DI WALLIS

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Strategia per dim. di Stirling: pongo

$$S_n := \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$$

e dimostro ① $S_n \rightarrow S_\infty \in \mathbb{R}$ ② $S_\infty = 1$ } $\Rightarrow$ Formula di Stirling

Dim di ①

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \sqrt{2\pi(n+1)} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \frac{1}{(n+1)n!} \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{2\pi n}} \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

In particolare per induzione si ottiene

$$S_n = S_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{S_{k+1}}{S_k} = S_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}$$

Passo ai logaritmi e ottengo

Logaritmo di

$$\log S_n = \log S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1 \right]$$

Quando $n \rightarrow \infty$ otterriamo che il RHS tende alla somma della serie, posto che questa converga. Quindi se la serie converge, allora $S_n \rightarrow S_\infty$ e

$$\log S_\infty = \log S_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1 \right]$$

Esercizio La serie converge. Con Taylor

$$\begin{aligned} \left(k + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1 &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + O\left(\frac{1}{k^4}\right) \right) - 1 \\ &= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2k}} + \frac{1}{3k^2} + \cancel{\frac{1}{2k}} - \frac{1}{4k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) - \cancel{1} \\ &= \frac{1}{12k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \Rightarrow \text{la serie converge} \\ &\quad \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---} \end{aligned}$$

Punto ② : Dando per buono il prodotto di Wallis, dim. $S_\infty = 1$.

$$\underbrace{\prod_{k=1}^n \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}}_{W_n} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} && \text{Moltiplico sopra e sotto per il num.} \\ &= \frac{[2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n)(2n)]^2}{[(2n)!]^2 (2n+1)} = \frac{2^{2n} (n!)^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sqrt{W_n} &= \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} && \text{Uso che } n! = \frac{1}{S_n} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &= \frac{\cancel{2^{2n}} \frac{1}{S_n^2} 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\frac{1}{S_{2n}} \sqrt{2\pi \cdot 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{W_m}} = \frac{\boxed{S_{2m}}}{\boxed{S_m^2}} \cdot \boxed{\sqrt{2\pi}} \cdot \boxed{\frac{m}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+1}}}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{1}{S_\infty} \cdot \cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S_\infty = 1$$

— o — o —

Dimostrazione del prodotto di Wallis

$$I_n := \int_0^\pi \sin^n x \, dx$$

lo faccio per parti con grande ritorus:

$$I_n = \int_0^\pi \sin^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= I_{n-2} - \int_0^\pi \underbrace{\sin^{n-2} x \cdot \cos x}_F \cdot \underbrace{\cos x}_G \, dx$$

$$= I_{n-2} - \left[\underbrace{\frac{1}{n-1}}_F \cdot \underbrace{\sin^{n-1} x}_G \cdot \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{\frac{1}{n-1}}_F \sin^{n-1} x \cdot \underbrace{\sin x}_g \, dx$$

$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n \quad \text{Grande ritorus}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right) I_n = I_{n-2} \Rightarrow \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

Dal cilindro $R_n := \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ Allora

$$R_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}}{\frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}} = \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} R_{n-1}$$

Da questa per induzione si ottiene

$$R_n = R_0 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = R_0 \cdot W_{n-1}$$

$$\text{Ora } R_0 = \frac{I_1}{I_0} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx} = \frac{2}{\pi}$$

quindi

$$R_n = \frac{2}{\pi} W_{n-1}$$

Quindi ci basta dim. che $R_n \rightarrow 1$

$$\frac{2n}{2n+1} I_{2n} \leq \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = I_{2n+1} \leq I_{2n}$$

$\uparrow$ $\sin^{2n} \leq \sin^{2n-1}$ $\uparrow$ ricorrenza $\nwarrow$ perché $\sin^{2n+1} \leq \sin^{2n}$

Dividendo tutto per I_{2n} si ottiene

$$\boxed{\frac{2n}{2n+1}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = R_n \leq \boxed{1}$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1

— o — o — FINE STIRLING-WALLIS

Torniamo alla serie

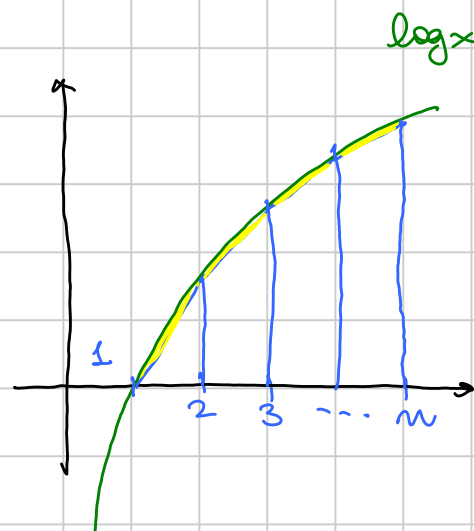
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right]$$

≥ 0

Area tra il trapezio ed il logaritmo

$$\int_n^{n+1} \log x \, dx = \frac{\log(n+1) + \log n}{2}$$

integrale area trapezio



$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \log x \, dx &= (n+1) \log(n+1) - \cancel{(n+1)} - n \log n + \cancel{n} \\ &= n[\log(n+1) - \log n] + \log(n+1) - 1 \end{aligned}$$

Sottraendo viene

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \log x \, dx &= \frac{\log(n+1) + \log n}{2} \\ &= n[\log(n+1) - \log n] + \frac{\log(n+1) - \log n}{2} - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \underbrace{[\log(n+1) - \log n]}_{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1 \end{aligned}$$

Questo ci dice che $\frac{S_{n+1}}{S_n} \geq 1$ perchè ha $\log \geq 0$,

quindi la monotonia di S_n (in particolare $S_n \geq S_1$).

— 0 — 0 —