

EPPUR SI MUOVE Trovare una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Nota bene: una funzione di questo tipo ha tutti i pol. di Taylor con centro in $x=0$ nulli, quindi non può essere la somma della sua serie di Taylor.

Esempio classico:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

oppure

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$



Come dimostro che $f(x)$ (diciamo la 1ª) è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$?

Per $x \neq 0$ è tutto banale (composizione di C^∞).

La derivata prima è 0 per $x < 0$ e

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x > 0.$$

Basta verificare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ e abbiamo $f'(0) = 0$ per lazione precedente.

Per fare il limite basta porre $y = \frac{1}{x}$ e viene $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2}{ey} = 0$.

Vediamo $f''(x)$:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^4} - e^{-\frac{1}{x}} \frac{2}{x^3} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Ancora una volta faccio il lim. di $f''(x)$ per $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow 0^-$ e trovo che $f''(0) = 0$.

Si può verificare per induzione che

$$f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{P_k(x)}{x^{2k}} \quad \text{per } x > 0$$

polinomio

Ancora una volta $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = 0$ (esponenziale vs polinomio)

e quindi $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
— 0 — 0 —

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(e^{\frac{1}{x^2}}) & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

Proprietà 1 $f(x) = o(x^k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin(e^{\frac{1}{x^2}})}_{\text{limitato}} = 0$$

Quindi $f(x)$ ammette pol. di Taylor (nulli) per ogni k .

Proprietà 2 $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \sin(\cdot) + \cancel{e^{-\frac{1}{x^2}}} \cos(\cdot) \cancel{e^{\frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{2}{x^3}\right)$

Fatta così $f'(x)$ non ha limite per $x \rightarrow 0^+$, anzi ha

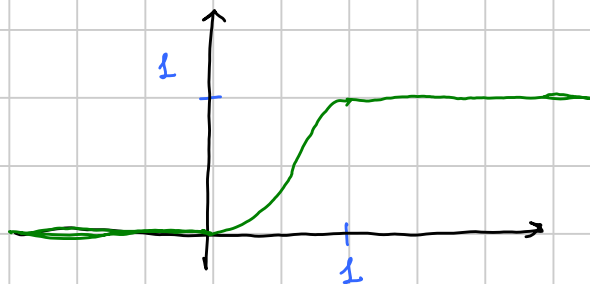
$\liminf = -\infty$ e $\limsup = +\infty$ (il cos oscilla e $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$)
 quindi $f''(0)$ non esiste

Quindi: $f(x)$ ha i polinomi di Taylor di ogni grado, MA
 i coeff. non sono dati dalla formula con le
 derivate,

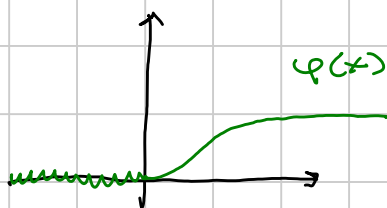
— o — o —

Esercizio Trovare una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$
 tale che

- $f(x) = 0$ per $x \leq 0$
- $f(x) = 1$ per $x \geq 1$
- $0 < f(x) < 1$ per $x \in (0, 1)$



Trucco classico $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \psi(x)}$ cercando φ e ψ
 opportune



Ad esempio

$$\psi(x) = \varphi(1-x)$$

$\varphi(x) =$ eppur si muove
 $\psi(x) = \varphi(1-x)$

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \varphi(1-x)}$$

Verifichiamo la monotonia

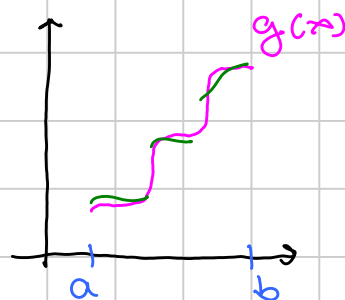
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\varphi'(x) [\varphi(x) + \varphi(1-x)] - \varphi(x) [\varphi'(x) - \varphi'(1-x)]}{[\dots]^2} \\ &= \frac{\boxed{\varphi'(x) \varphi(1-x) + \varphi(x) \varphi'(1-x)}}{[\dots]^2} > 0 \text{ per } x \in (0, 1) \end{aligned}$$

Esercizio di analisi 3 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann.

Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

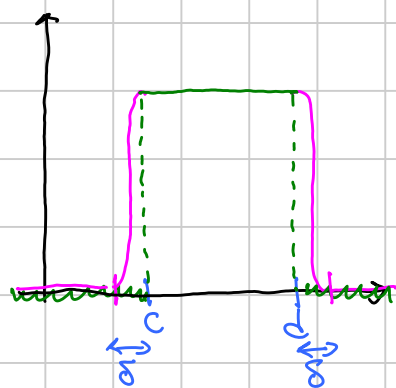
$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon$$

DIVIDE ET IMPERA !!



Caso banale $f(x) =$ rettangolo
cioè $f(x)$ vale 1 in un
intervallo $[c, d]$.

Faccio come prima ottenendo una
 C^∞ che vale 1 in $[c, d]$ e 0
quando $x \leq c - \delta$ e $x \geq d + \delta$



Se δ è abbastanza piccolo l'integrale
della differenza è piccolo.

Caso semi-banale : $f(x) =$ step function : basta approssimare
tutti i rettangoli allo stesso modo

$$f(x) = \sum \underbrace{f_i(x)}_{\text{di tipo banale}}$$

$$g(x) = \sum \underbrace{g_i(x)}_{C^\infty \text{ che approx. le } f_i(x)}$$

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \sum \int_a^b \underbrace{|f_i(x) - g_i(x)| dx}_{\substack{\text{possono diventare} \\ \text{piccoli a piacere}}}$$

Caso generale : approssimo $f(x)$ con una step function $\varphi(x)$
che ha $\int |f - \varphi| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, e poi approssimo φ con una $C^\infty g$
che ha $\int |\varphi - g| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi g è la C^∞ cercata.