

Derivate: come dimostro che una funzione è derivabile o non derivabile in un p.to

Esempio $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot |\sin x|$. In quali p.ti è derivabile?

Sicuramente in tutti gli $x \neq k\pi$. In questi p.ti x e $\sin x$ non si annullano, quindi i val. assd. non si annullano e tutto è composizione di funzioni derivabili.

Resta aperto il plem. dei p.ti $x = k\pi$.

Risposta: in $x=0$ è derivabile

in $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ non è derivabile

In $x=0$ faccio il rapporto incrementale

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{|h|} \cdot |\sin h|}{h} = \sqrt{|h|} \cdot \boxed{\frac{|\sin h|}{h}} \rightarrow 0$$

$\downarrow$
 0 $\downarrow$
 limitato

Detto altrimenti $f(x) \sim |x|^{3/2}$ per $x \rightarrow 0$.

Come verifico che non è derivabile in $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$?

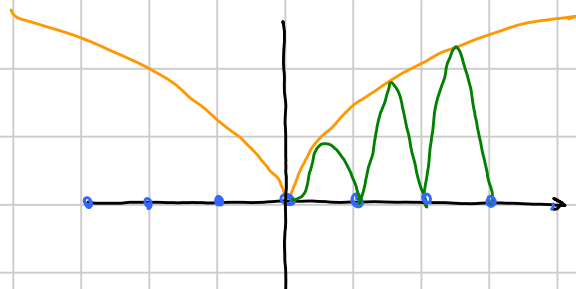
Ancora una volta rapp. incrementale.

Caso $x = 2k\pi$ (in realtà funziona anche per $x = k\pi$)

$$\begin{aligned} \frac{f(2k\pi + h) - f(2k\pi)}{h} &= \frac{|2k\pi + h|^{1/2} |\sin(2k\pi + h)|}{h} \\ &= \underbrace{|2k\pi + h|^{1/2}}_{\downarrow |2k\pi|^{1/2}} \underbrace{\frac{|\sin h|}{h}}_{\substack{\rightarrow +1 \text{ per } h \rightarrow 0^+ \\ \rightarrow -1 \text{ per } h \rightarrow 0^-}} \end{aligned}$$

Se $k \neq 0$ il lim per $h \rightarrow 0$ non esiste

In tutti i p.ti $x = k\pi$
 esistono derivata dx e sx
 e coincidono solo se $k=0$.



Teorema Siano $a < b < c$ e sia $f: (a, c) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- f sia derivabile in (a, b) e in (b, c) e continua in b
- si ha (in particolare i limiti esistono)

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f'(x) = l$$

Allora $f'(b) = l$ (e in particolare esiste)

Lemma Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

- (i) f continua in $[a, b]$
- (ii) f derivabile in $(a, b]$
- (iii) esiste

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$$

Allora in $x = a$ esiste la derivata destra e vale l

Dim.
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{h} \cdot f'(c(h))}{\cancel{h}}$$

$\uparrow$
 Lagrange

Quando $h \rightarrow 0^+$ abbiamo che $c(h) \rightarrow a$, quindi RHS $\rightarrow l$
 che quindi è la derivata destra.

— o — o —

Dim. teorema Segue dal Lemma applicato negli intervalli
 $[a, b]$ e $[b, c]$

Utilizzo operativo Supponiamo f continua in $\mathbb{R}$ e derivabile per $x \neq 0$.

Supponiamo che esistano

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = l_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = l_2$$

Allora: $\rightarrow$ se $l_1 = l_2$, allora $f'(0)$ esiste

$\rightarrow$ se $l_1 \neq l_2$, allora $f'(0)$ non esiste

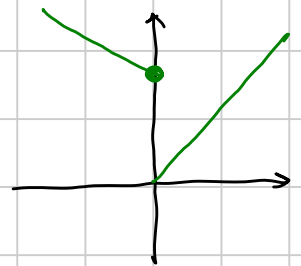
Dim. Segue dal fatto che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = l_1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = l_2$$

— 0 — 0 —

Esempio La funzione $g(x) = \begin{cases} x & \text{per } x > 0 \\ 3-x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$



può essere la derivata di una qualche $f(x)$?

NO! Se esistesse dovrebbe avere in $x = 0$ derivata destra = 0 e derivata sinistra = 3.

Conseguenza Se $f'(x)$ è discontinua in un p.to x_0 , allora i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

non possono esistere (se fossero uguali, allora $f'(x_0)$ esisterebbe, ma sarebbe continua in x_0 , se fossero diversi allora $f'(x_0)$ non esisterebbe).

Problema (aperto?) Data una funzione $g(x)$, stabilire se esiste $f(x)$ tale che $f'(x) = g(x)$

(se $g(x)$ è continua è banale)

Una condizione necessaria è la PROPRIETÀ DI DARBOUX delle derivate:

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 , allora

$$\liminf_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \leq f'(x_0) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

e stessa cosa per $x \rightarrow x_0^-$

Dim.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{h \cdot f'(c(h))}{h}$$

Faccio $\liminf$ e $\limsup$ a dx e sx per $h \rightarrow 0^+$ e per $h \rightarrow 0^-$.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x=0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

Per $x \neq 0$ la derivabilità segue dai teoremi algebrici e

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Per vedere se è derivabile in $x=0$ faccio il limite di $f'(x)$ per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow 0^-$. In questo caso non esistono, quindi non posso concludere nulla.

Per concludere uso rapp. incrementale e ottengo che $f'(0) = 0$.

NB: $\liminf$ e $\limsup$ di $f'(x)$ per $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow 0^-$ sono ± 1 , quindi la propr. di Darboux è salva.

Oss. Se $f(0) = 0$ e $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$, allora $f'(0) = 0$

Dim. Rapporto incrementale.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

In questo caso $f'(0) = 1$ perché $f(x) = x + 2$ quella di prima,

Questa funzione non è monotona in nessun intervallo del tipo $(-\delta, \delta)$ (ogni intervallo di questo contiene punti con $f'(x) > 0$ e punti con $f'(x) < 0$)

— o — o —

