

SIMBOLI DI LANDAU

→ o piccolo

→ O grande

→ equivalenza asintotica ($\sim$)

Setting: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, dato un p.to x_0 in cui fare i limiti ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di accumulazione), data $g: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se posso scrivere

$$f(x) = g(x)w(x)$$

con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

Def. Si dice che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se ...

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$$

Def. Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se...

$w(x)$ è limitata in un intorno di x_0

oppure, che è lo stesso

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} |w(x)| \in \mathbb{R}$$

se esiste il limite ed è reale, ancora meglio

Esempio $\sin x = O(x)$ per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x \cdot \frac{\sin x}{x} \quad w(x) \rightarrow 1$$

quindi $\sin x = O(x)$ e
 anzi $\sin x \sim x$

Oss. Nei casi in cui posso dividere per $g(x)$ si ha che

$$w(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ e quindi le 3 definizioni coincidono limiti di } \frac{f(x)}{g(x)}$$

<u>Esempi</u>	$\sin x = x + O(x^2)$	SI	①	} per $x \rightarrow 0$
	$\sin x = x + O(x^2)$	SI	②	
	$\sin x = x + O(x^3)$	SI	③	

Brutalmente: $O(x^{20})$ mangia tutte le potenze x^k con $k > 20$
 $O(x^{20}) \sim \quad \quad \quad x^k$ con $k \geq 20$

Per dimostrare la ②, cioè $\sin x - x = O(x^2)$ basta dividere per x^2 e verificare la limitatezza del rapporto

$$w(x) = \frac{\sin x - x}{x^2} \rightarrow 0$$

Fatto 1 Se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora
 $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Dim. Se $w(x) \rightarrow 0$, allora $\limsup |w(x)| = 0 \in \mathbb{R}$.

Fatto 2 Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) = O(g(x))$
per $x \rightarrow x_0$

Fatto 3 $\left. \begin{array}{l} f(x) = O(x^k) \text{ per } x \rightarrow 0 \\ g(x) = O(x^r) \text{ per } x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x)g(x) = O(x^{k+r})$

Dim. $f(x) = x^k w_1(x) \rightsquigarrow f(x) \cdot g(x) = x^{k+r} w_1(x) w_2(x)$
 $g(x) = x^r w_2(x)$
 $\downarrow$
 $\downarrow$
 $\underbrace{\text{limitato}}_0 \quad 0$
 $\downarrow$ carabinieri
 0

Fatto 4 $g(x) = o(x^k)$ per $x \rightarrow 0$
 $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$

Cosa posso dire di $g(f(x))$? Che è $o(x^k)$

Dim. $g(x) = x^k \underbrace{\omega_1(x)}_{\rightarrow 0}$ $f(x) = x \cdot \underbrace{\omega_2(x)}_{\downarrow \text{limitato}}$

$$g(f(x)) = [f(x)]^k \omega_1(f(x))$$

$$= x^k \underbrace{[\omega_2(x)]^k \omega_1(x \cdot \omega_2(x))}_{\omega_3(x)} = o(x^k)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{[\omega_2(x)]^k}_{\downarrow \text{limitato}} \underbrace{\omega_1(x \cdot \omega_2(x))}_{\downarrow 0} = 0$$

Oss. Lo usiamo tutte le volte che si sviluppa una composizione:

$$e^{\sin x} \quad e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \underbrace{o(t^3)}_{f(t)}$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x)$$

$\downarrow$
 $o(x^3)$

Cosa abbiamo usato? $\left. \begin{array}{l} f(t) = o(t^3) \\ \sin x = O(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\sin x) = o(x^3)$

Fatto 5 $g(x) = o(x^k)$ $\Rightarrow f(g(x)) = o(x^k)$
 $f(x) = O(x)$

Dim. $g(x) = x^k \underbrace{\omega_1(x)}_{\uparrow 0}$ $f(g(x)) = g(x) \omega_2(g(x))$
 $f(x) = x \underbrace{\omega_2(x)}_{\downarrow \text{lim}}$ $= x^k \underbrace{\omega_1(x)}_{\downarrow 0} \underbrace{\omega_2(g(x))}_{\downarrow \text{lim}}$

Def. (Ordine di infinitesimo e di infinito e parte principale)

→ Se $f(x) \sim Cx^\alpha$ per $x \rightarrow 0$ si dice che α è l'ordine di infinitesimo e Cx^α è la parte principale (se $\alpha < 0$ in realtà è un ordine di infinito)

→ se $f(x) \sim Cx^\alpha$ per $x \rightarrow +\infty$ si dice analogamente...

Esempio 1 $f(x) = x - \arctan x$

Per $x \rightarrow 0$ la parte principale è $\frac{1}{3}x^3$

Per $x \rightarrow +\infty$ la parte principale è x

Esempio 2 $f(x) = \frac{\sin x - \arctan x}{x^{30}}$

Per $x \rightarrow 0$ tende a $+\infty$ e la parte principale è $\frac{1}{6} \frac{1}{x^{27}}$

$$\sin x - \arctan x = x - \frac{1}{6}x^3 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3$$

Per $x \rightarrow +\infty$ non c'è una parte principale di tipo potenza, però posso dire che

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{30}}\right)$$

↓ questa informazione basta per concludere che $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge assol.

Esercizio Se $f(x) \sim x$ per $x \rightarrow +\infty$ e $f(x)$ è continua in $[0, +\infty)$
 $\Rightarrow$ unif. cont. in $[0, +\infty)$?

NO! Basta prendere $f(x) = x + \sqrt{x} \cdot \sin x$

↓ non è unif. continua, e quindi non è $f(x)$

(sarebbe $f(x) - x =$ unif. cont.)

Esempio $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = a_n$ ben definita perchè la serie converge

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \text{ perchè } a_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_S - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}}_S = 0$$

Ordine di infinitesimo e parte principale di $a_n = ?$

Brutal mode: $a_n \sim \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \sim \left[-\frac{1}{x} \right]_n^{+\infty} = \frac{1}{n}$

Per dimostrarlo rigorosamente basta fare un confronto serie-integrali.

Se fosse stato $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$

Esempio $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\arctan(t^{2015})} dt$

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{2}{\pi} x^2$

Brutal mode: $f(x) \sim \int_x^{x^2} \frac{1}{\frac{\pi}{2}} dx \sim \frac{2}{\pi} x^2$

Per dimostrarlo rigorosamente divido per x^2 e faccio il limite con L' Hôpital MA devo prima verificare che $f(x) \rightarrow +\infty$ o usare Hôpital ottimizzato

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\dots} \geq \int_x^{x^2} \frac{2}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} (x^2 - x) \rightarrow +\infty \\ &= \dots \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\arctan(1)} dt = \dots, \end{aligned}$$

per ogni $x \geq 1$