ANALISI 1 – LEZIONE 116

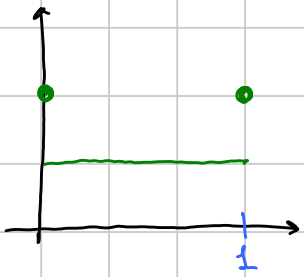
Titolo nota 21/04/2015

CONVESSITÀ E CONTINUITÀ

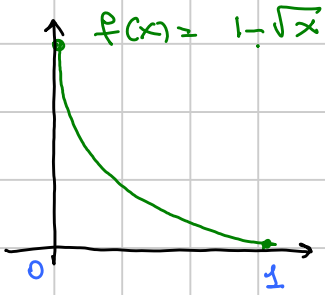
① Una funzione convessa, è per forza continua? NO

② Se è continua e convessa, è per forza lip.? NO

Esempi



convessa in $[0,1]$, ma non continua



$f(x) = 1-\sqrt{x}$ è convessa e cont. in $[0,1]$, ma non lip.

Teorema 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso, e sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa. Allora $f(x)$ è continua in $\mathring{I}nt(A)$.

Dim. Prendo $x_0 \in \mathring{I}nt(A)$ e dim. che esiste il limite in x_0.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)$$

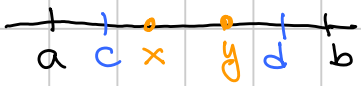
Per $x \to x_0^+$: $\quad f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \cdot 0 = 0$

Per $x \to x_0^-$: $\quad f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \cdot 0 = 0$

Quindi $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, da cui la continuità

— o — o —

Teorema 2 (Locale lipschitzianità)



Siano $a < c < d < b$ e sia

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Allora f è lipschitziana in $[c,d]$

Dim. Prendiamo due p.ti qualunque

$$c \le x < y \le d.$$

Allora

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = r(x,y) \le r(x,b) \le r(d,b)$$

($r(x,b) \le r(d,b)$: Monot. 2ª variabile; $r(x,y) \le r(x,b)$: Monot. 1ª variabile)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = r(x,y) \ge r(a,y) \ge r(a,c)$$

I due estremi non dipendono da x e y. Quindi

$$r(a,c) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le r(d,b)$$

Fatto generale: se $A \le X \le B$, allora $|X| \le \max\{|A|,|B|\}$

(si dimostra distinguendo i casi $X \ge 0$ e $X \le 0$: precorso!)

Ma allora

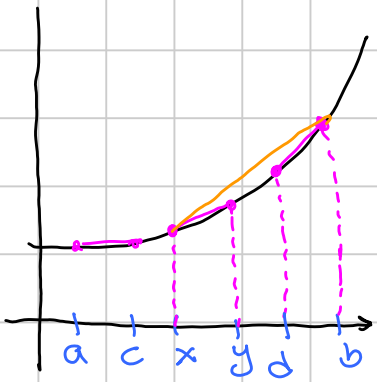
$$\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \le \max\{|r(d,b)|, |r(a,c)|\} =: L$$

e questo dice che $f(x)$ è lip. in $[c,d]$

—o—o—

Oss. In pratica sto dicendo che il rapporto incrementale tra x e y si controlla con quelli

- tra a e c
- tra d e b.



—o—o—

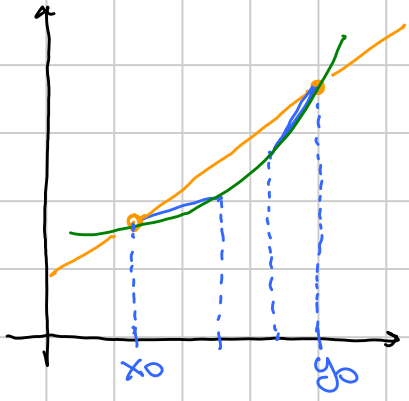
CONVESSITÀ E DERIVATA PRIMA

① Una funzione convessa può non essere derivabile in alcuni p.ti
$f(x) = |x|$

② Una funzione convessa ammette sempre derivata dx e sx nei p.ti $x_0 \in \text{Int}(A)$ (sul bordo non è detto)

Teorema (Monotonia delle derivate destra e sinistra)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa.
Siano $x_0 \in \text{Int}(A)$ e $y_0 \in \text{Int}(A)$ con $x_0 < y_0$.
Allora

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(y_0) \leq f'_+(y_0)$$



Dim. Tanto per cambiare, è il lemma dei 3 rapporti incrementali

Per h positivo piccolo

$$r(x_0, x_0+h) \leq r(x_0, y_0)$$

quindi

$$f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0)$$

Analogamente per h positivo piccolo

$$r(x_0, y_0) \leq r(y_0-h, y_0)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0)$$

Di conseguenza ho ottenuto che

$$\boxed{f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0)}$$

Corollario Supponiamo che f sia derivabile in A.
Allora

$$f \text{ è convessa} \iff f'(x) \text{ è debolmente crescente}$$

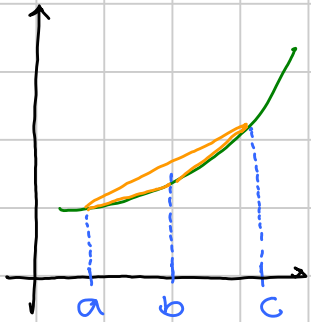
Dim. $\Rightarrow$ Teorema precedente visto che $f' = f'_+ = f'_-$.

Aggiunto dopo VIDEO: RIFATTA MEGLIO ALLA LEZIONE 118

$\Leftarrow$ Dalla monotonia della derivata segue il lemma dei 3 rapporti incrementali, o per lo meno segue il confronto

$$r(a,b) \le r(b,c)$$

perché sono derivate in pti intermedi (via Lagrange)



$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$f(c) = f(a) + \int_a^c f'(x)\,dx = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx + \int_b^c f'(x)\,dx$$

Devo dimostrare che

$$f(b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

$$= \frac{c-b}{c-a} f(a) + \frac{b-a}{c-a} f(c)$$

Sostituendo $f(a) + \int_a^b \ldots \le \frac{c-b}{c-a} f(a) + \frac{b-a}{c-a}\left(f(a) + \int_a^b + \int_b^c\right)$

Semplifico e se ne va $f(a)$ e resta

$$\int_a^b f'(x)\,dx \le \frac{b-a}{c-a}\int_a^b f'(x)\,dx + \frac{b-a}{c-a}\int_b^c f'(x)\,dx$$

$$\left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right)\int_a^b f'(x)\,dx \le \frac{b-a}{c-a}\int_b^c f'(x)\,dx$$

$$\frac{c-b}{c-a}\int_a^b f'(x)\,dx \le \frac{b-a}{c-a}\int_b^c f'(x)\,dx$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx \le \frac{1}{c-b}\int_b^c f'(x)\,dx$$

valore di $f'(x)$ in un p.to tra a e b — valore di $f'(x)$ in un p.to tra b e c

FINE PARTE RIFATTA MEGLIO (?) ALLA LEZIONE 118

—o— o —

Moralmente le funzioni convesse stanno sopra la retta tangente.

Teorema Sia A convesso, sia $f: A \to \mathbb{R}$ convessa. Sia $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$ e sia $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

Allora

$$f(x) \ge \underbrace{f(x_0) + m(x-x_0)}_{\text{retta per } (x_0, f(x_0)) \text{ con coeff. ang. } m} \qquad \forall x \in A$$

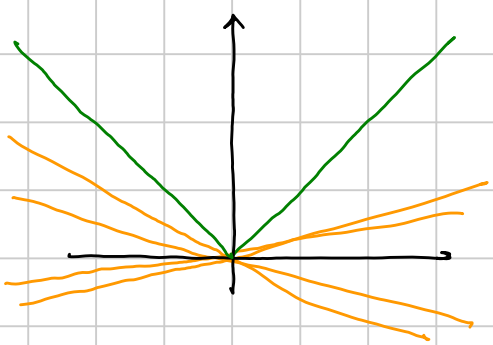
Dim. Solito lemma. Se $x > x_0$ devo dim. che

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{r(x_0,x)} \ge m$$

$$r(x_0,x) \ge f'_+(x_0) \ge m$$

Se $x < x_0$, devo dim. che $\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{r(x,x_0)} \le m$

$$r(x,x_0) \le f'_-(x_0) \le m$$

—o—

Disegno