

FUNZIONI CONVESSE

Def. (Insiemi convessi) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in A$, si ha che tutto il segmento di estremi a e b è contenuto in A .

Oss. La definizione si può dare in generale per sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}^2$, o $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Fatto I sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ convessi sono solo

- il vuoto
- i p.ti singoli
- gli intervalli (con o senza estremi)
- le semirette (con o senza estremo, destre o sinistre)
- tutto $\mathbb{R}$

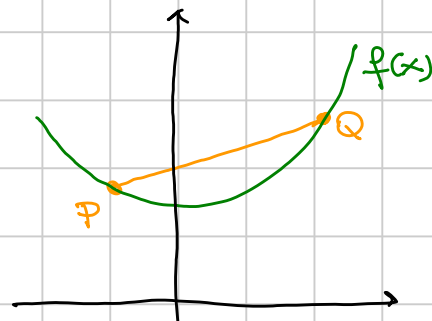
Dim. Esercizio (Hint: prendo $\inf A$ e $\sup A$ e dim. che qualunque cosa in mezzo deve stare in A)

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme convesso, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è convessa in A se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A \\ \forall \lambda \in [0,1]$$

Def. ufficiale algebrica

Oss. Geometricamente questo equivale a dire: per ogni coppia di p.ti del grafico P e Q , tutto il segmento PQ sta "sopra" il grafico.



Equivalenza tra le 2 definizioni

Oss. 1 Siano x e y due p.ti di A . Allora $\lambda x + (1-\lambda)y$, con $\lambda \in [0,1]$, rappresenta tutti i p.ti del segmento di estremi x e y . La stessa cosa vale in $\mathbb{R}^n$ se x e y sono vettori

$$\lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y)$$

$\leadsto$ per $\lambda=0$ viene y
 $\leadsto$ per $\lambda=1$ viene x
 $\leadsto$ per $\lambda \in (0,1)$ viene un p.to intermedio

Per dimostrarlo per bene dovrai verificare che

- $\lambda x + (1-\lambda)y$ è sempre compreso tra x e y
- ogni p.to compreso si scrive in questo modo per un opportuno λ .

Fatto importante

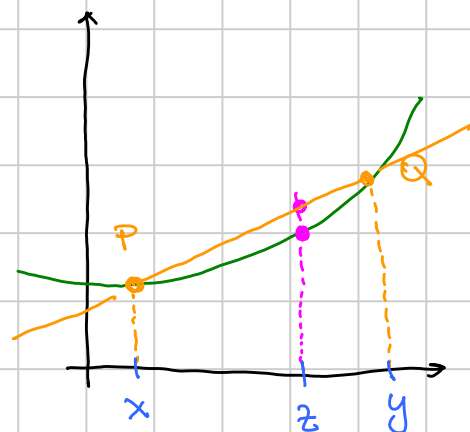
$$\lambda = \frac{|z-y|}{|x-y|}$$



$$f(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda)y}_z) \leq \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)}_{r(z)}$$

dove $r(z)$ è l'equazione della retta che passa per P e Q

La def. di funzione convessa equivale a dire che



$$f(z) \leq \text{retta calcolata in } z$$

— o — o —

Piano : $\rightarrow$ rapporti tra convessità e continuità
 $\rightarrow$ rapporti tra " e derivata prima
 $\rightarrow$ " " " e derivata seconda

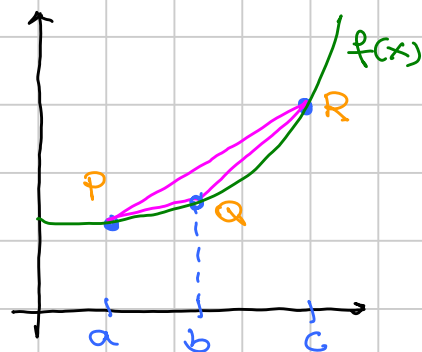
Lemma (dei 3 rapporti incrementali)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Sia $a < b < c$ tre elementi di A .

Allora



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 coeff. aug. coeff. aug. coeff. aug.
 PQ PR QR

Dim. Posso scrivere $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$ dove $\lambda = \frac{c - b}{c - a} \in (0, 1)$

$$f(b) = f(\lambda a + (1 - \lambda)c) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(c)$$

Passo 1 Sottraggo $f(c)$ a dx e sx:

$$f(b) - f(c) \leq \lambda (f(a) - f(c)) = \underbrace{\frac{c - b}{c - a}}_{\lambda} (f(a) - f(c))$$

Se divido per $c - b > 0$ ottengo

$$\frac{f(b) - f(c)}{c - b} \leq \frac{f(a) - f(c)}{c - a}$$

e cambiando i segni

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

LHS $\leq$ RHS

Passo 2 Sottraggo $f(a)$ a dx e sx

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &\leq \lambda f(a) - f(a) + (1-\lambda) f(c) \\ &= (1-\lambda) (f(c) - f(a)) \\ &= \frac{b-a}{c-a} (f(c) - f(a)) \quad 1-\lambda = 1 - \frac{c-b}{c-a} = \frac{b-a}{c-a} \end{aligned}$$

Dividendo per $b-a > 0$ ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c-a}$$

LHS RHS

— o — o —

Notazione Indicando il rapp. increment. con

$$r(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad y > x$$

possiamo ri enunciare il lemma come

$$\boxed{r(a, b) \leq r(a, c) \leq r(b, c)} \quad \forall a < b < c$$

o ancora meglio dicendo che

- fissato y , la funzione $x \rightarrow r(x, y)$ è deb. cresc. (dx)
 - fissato x , la funzione $y \rightarrow r(x, y)$ è deb. cres. (sx)
- o — o —

Def. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \text{Int}(A)$. Definiamo

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{Derivata destra in } x_0)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{Derivata sinistra in } x_0)$$

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.
 Sia $x_0 \in \text{Int}(A)$. Sia f CONVESSA,
 Allora

$f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono per forza e

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

Se vale il segno di uguale allora esiste $f'(x_0)$, ed è uguale al valore comune.

Dim. $\Delta > 0$ $\frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$

il rapporto increment. è una funzione deb. cresc. di Δ per il lemma dei 3 rapporti e quindi ha limite per $\Delta \rightarrow 0^+$.

Idem per $\Delta \rightarrow 0^-$ (qui serve la monotonia rispetto alla prima variabile).

Resta da dim. la disuguaglianza.

Per il lemma dei 3 rapporti

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - k)}{k} \leq \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

per ogni Δ e k positivi. Fisso k e faccio $\Delta \rightarrow 0^+$. Ottengo

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - k)}{k} \leq f'_+(x_0) \quad (\text{ora so non essere } -\infty)$$

Facendo ora il limite per $k \rightarrow 0^+$ ottengo al LHS la der. sx:

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

ora so che non è $+\infty$

Esempio $f(x) = |x|$ $x_0 = 0$

$$f'_+(x_0) = 1$$

$$f'_-(x_0) = -1$$

