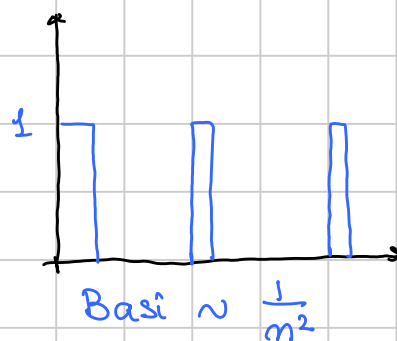


Fatto già visto. Supponiamo che $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converga.

Non è detto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Anche se $f(x)$ è continua posso fare dei triangolini.



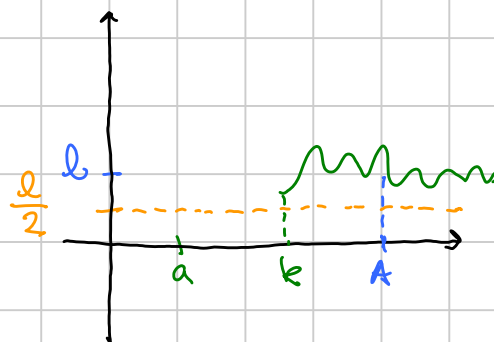
Fatto 1 Sicuramente è vero che

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 0 \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Quindi se il limite esiste è per forza 0

Dim. Supponiamo per assurdo che

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$$



Per caratterizzazione del $\liminf$, esiste $k \in \mathbb{R}$, $k \geq a$ tale che

$$f(x) \geq \frac{l}{2} > 0 \quad \forall x \geq k$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \int_a^A f(x) dx &= \int_a^k f(x) dx + \int_k^A f(x) dx \\ &\geq \underbrace{\int_a^k f(x) dx}_{\text{fisso}} + \underbrace{\frac{l}{2} (A-k)}_{\rightarrow +\infty \text{ quando } A \rightarrow +\infty} \end{aligned}$$

Se $l = +\infty$, uso 2015 invece di $\frac{l}{2}$.

Fatto 2 Se $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è unif. continua e

$\int_a^\infty f(x) dx$ converge, allora $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Idea brutale: se $f(x)$ ogni tanto è grande, poi ci vuole del tempo a tornare piccola, e nel frattempo l'integrale cresce.

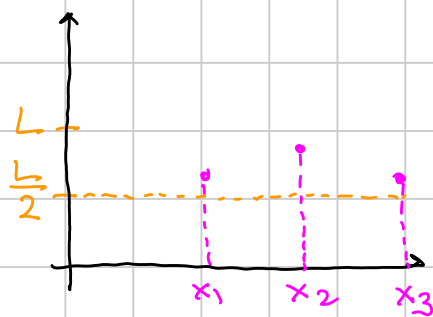
Dim. Supponiamo per assurdo che il limite non sia 0.
Wlog per il fatto precedente possiamo assumere che sia

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = L > 0$$

Per caratterizzazione esiste una succ.

$x_n \rightarrow \infty$ tale che

$$f(x_n) \geq \frac{L}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



Ora uso la def. di uniforme continuità con $\varepsilon = \frac{L}{4}$.
Ottengo un $\delta > 0$ tale che

$$|y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon = \frac{L}{4}$$

Quindi nell'intervallo $[x_n, x_n + \delta]$ sarà $f(x) \geq \frac{L}{4}$

Ora

$$\int_{x_n}^{x_n + \delta} f(x) dx \geq \delta \cdot \frac{L}{4}$$

$$\int_a^{x_n + \delta} f(x) dx - \int_a^{x_n} f(x) dx$$

↓

$$\int_a^\infty f(x) dx - \int_a^\infty f(x) dx = 0$$

quindi $0 \geq \frac{\delta L}{4}$
assurdo

Fatto generale: se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge e $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty$

allora $\int_{x_n}^{y_n} f(x) dx \rightarrow 0$

Dim.

$$\int_{x_n}^{y_n} f(x) dx = \int_a^{y_n} f(x) dx - \int_a^{x_n} f(x) dx$$
$$\underbrace{\int_a^{+\infty} f(x) dx - \int_a^{+\infty} f(x) dx}_0$$

Esercizio

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \quad \text{per } x > 0$$

Domanda: è unif. continua?

Intanto non ci sono p.b.m. di definizione perché $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ in 0

$f(x)$ la posso estendere con continuità fino a $t=0$ ponendo $f(0)=0$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \in \mathbb{R}$$

grazie a e^{-t}
↓

Continua su semiretta + limite all'infinito reale $\Rightarrow$ unif. cont.

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) \text{ è lip. in } [a, +\infty) \text{ per ogni } a > 0$$

non è lip. in $(0,1)$

Brutal mode: quando $x \rightarrow 0$ si ha

$$f(x) \sim \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x}$$

$\Rightarrow$ quindi potrebbe essere $\frac{1}{2}$ -Hölder

Dimostro che è $\frac{1}{2}$ -Hölder

Dim. 1 Wlog $y \geq x$ e quindi

naively è $\frac{1}{2}$ -Hölder

$$|f(y) - f(x)| = \int_x^y \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leq \int_x^y \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2[\sqrt{y} - \sqrt{x}] \leq 2\sqrt{y-x}$$

$\uparrow$ $e^{-t} \leq 1$ $\uparrow$ conto

Dim. 2 Almeno nell'intervallo $[0,1]$ posso dim. che $f^2(x)$ è Lip.

$$\begin{aligned} [f^2(x)]' &= 2f(x) \cdot f'(x) = 2f(x) \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \\ &= 2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &\leq 2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} \leq 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f^2(x)$ lip $\Rightarrow f(x)$ $\frac{1}{2}$ -Hölder.

Provo a dimostrare che NON è $(\frac{1}{2} + \varepsilon)$ -Hölder per ogni $\varepsilon > 0$.
Dimostro che NON è β -Hölder per ogni $\beta > \frac{1}{2}$.

Per assurdo se lo fosse avrei $|f(y) - f(x)| \leq H |y-x|^\beta$
In particolare con $x=0$ troverei

$$|f(y)| \leq H y^\beta, \text{ ma}$$

$$f(y) = \int_0^y \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \geq \frac{1}{2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{y}$$

$\uparrow$ vale per gli y vicini a 0 quando $e^{-t} \geq \frac{1}{2}$

Mettendo insieme le 2 cose avrei $\sqrt{y} \leq H y^\beta$, quindi dividendo

$1 \leq H \cdot y^{\beta - \frac{1}{2}}$. Se $\beta > \frac{1}{2}$ il RHS $\rightarrow 0$ per $y \rightarrow 0$, da cui $1 \leq 0$ che è assurdo.

— 0 — 0 —