

FUNZIONI HÖLDERIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\alpha \in (0,1)$.

Si dice che f è α -Hölderiana in A se esiste una costante H tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq H |y-x|^\alpha \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Esempio $A = [0, +\infty)$ $f(x) = \sqrt{x}$ è $\frac{1}{2}$ -Hölderiana.

Infatti

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq H |x-y|^{1/2} = H \sqrt{|y-x|} \quad \forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0$$

La disuguaglianza è vera anche con $H=1$. Infatti

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \stackrel{?}{\leq} |y-x|^{1/2} \Leftrightarrow y+x-2\sqrt{xy} \stackrel{?}{\leq} |y-x|$$

wlog $y \geq x$, quindi $\cancel{y}+x-2\sqrt{xy} \stackrel{?}{\leq} \cancel{y}-x \Leftrightarrow 2x \leq 2\sqrt{xy}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ ok.

Oss. La Lipschitzianità è Hölderianità con $\alpha = 1$.

Oss. Se A è un intervallo, allora le funzioni α -Hölderiane con $\alpha > 1$ sarebbero solo le costanti.

Dim. L'idea è che $f'(x_0) = 0$ ovunque nell'intervallo.

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H |h|^\alpha}{|h|} = 0 \text{ se } \alpha > 1.$$

Oss. L' Hölderianità è una proprietà metrica e globale, cioè dipende dall' insieme A .

Prop. Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è α -Hölderiana per un qualche $\alpha \in (0,1)$, allora f è unif. continua in A .

[Dm.] (Stessa del caso lip.) Fisso $\varepsilon > 0$. Scelgo δ in modo che $H\delta^\alpha = \varepsilon$, cioè

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{H} \right)^{1/2}$$

Allora per ogni x e y in A con $|x-y| < \delta$ si avrà

$$|f(x) - f(y)| \leq H |y - x|^{\alpha} < H \delta^{\alpha} = \varepsilon$$

e quindi è unif. continua,

Esercizio $A = [0, +\infty)$ $f(x) = \sqrt[62]{x}$
Dimostrare che $f(x)$ è $\frac{1}{62}$ -Hölderiana.

Zeige die, dass $|\sqrt[62]{y} - \sqrt[62]{x}| \leq \sqrt[62]{|y-x|}$

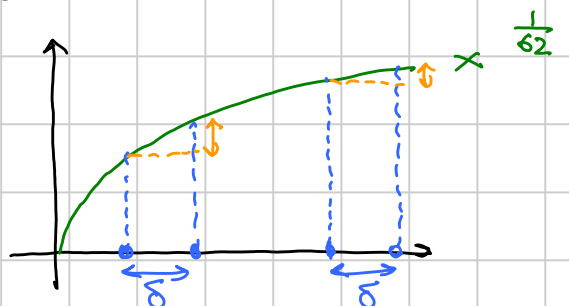
wlog $y \geq x$, ponga $y = x + \delta$. Mi reduzco a dim. de

$$\underbrace{(x+\delta)^{\frac{1}{62}} - x^{\frac{1}{62}}}_{g(x)} \leq \delta^{\frac{1}{62}}$$

Spero che $g(x)$ sia deb. decrescente. A quel p.to $g(x) \leq g(0) = \delta^{\frac{1}{62}}$

$$g'(x) = \frac{1}{62} \frac{1}{(x+5)^{61/62}} - \frac{1}{62} \frac{1}{x^{61/62}} \leq 0.$$

A parità di diff. orizz., la diff. verticale decresce quando x aumenta



Proprietà delle funzioni α -Hölderiane

$$\textcircled{1} \quad f \text{ } \alpha\text{-Höld} \text{ e } g \text{ } \alpha\text{-Höld} \Rightarrow f+g \text{ } \alpha\text{-Höld}$$

Dim.

$$\begin{aligned} & |f(y) + g(y) - f(x) - g(x)| \\ & \leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \\ & \leq M_f |y-x|^\alpha + M_g |y-x|^\alpha \\ & = (M_f + M_g) |y-x|^\alpha \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad f \text{ } \alpha\text{-Höld}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f(x) \text{ } \alpha\text{-Höld}$$

Dim. Esercizio

$$\textcircled{3} \quad f \text{ e } g \text{ } \alpha\text{-Höld} + \text{limitate} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \text{ } \alpha\text{-Höld}$$

Dim.

$$\begin{aligned} & |f(y)g(y) - f(x)g(x)| \quad \dots \text{termine misto} \dots \\ & \leq |f(y)g(y) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(x)g(x)| \\ & = |g(y)| \cdot |f(y) - f(x)| + |f(x)| \cdot |g(y) - g(x)| \\ & \leq M_g \cdot M_f |y-x|^\alpha + M_f \cdot M_g |y-x|^\alpha \\ & = (M_g \cdot M_f + M_f \cdot M_g) |y-x|^\alpha \end{aligned}$$

Esercizio Mostra che basta che una sia non limitata e la tesi non è più vera

- ④ f α -Hölderiana, g β -Hölderiana (in regioni compatibili)
 $\Rightarrow g(f(x))$ è $\alpha\beta$ -Hölderiana

Dim. $|g(f(y)) - g(f(x))| \leq M_g |f(y) - f(x)|^\beta$
 $\uparrow$
 g è β -Höld

$$\leq M_g M_f^\beta |y-x|^{\beta\alpha}$$

$\uparrow$
 f è α -Höld

- ⑤ Siano $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ α -Hölderiana
 Supponiamo che A sia un insieme LIMITATO
 Allora f è β -Hölderiana.

Dim. $|f(y) - f(x)| \leq H |y-x|^\alpha$

$$= H |y-x|^\beta \cdot |y-x|^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}$$

$$\leq \underbrace{H [\text{diam}(A)]^{\alpha-\beta}}_{\text{costante di } \beta\text{-Hölderianità}} \cdot |y-x|^\beta$$

$\text{diam}(A)$ = diametro di A = $\sup(A) - \inf(A)$
 è finito se e solo se l'insieme A è limitato

- ⑥ Se f è α -Hölderiana in A e $B \subseteq A$, allora f è α -Höld in B (Dim. banale)

- ⑦ Se f è α -Höld in A e in B , allora in generale NON è α -Höld in $A \cup B$ (esempio: $+1$ per $x > 0$, -1 per $x < 0$), ma è vero se

$\max A = \min B$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 in particolare esistono

Dim.: esercizio uguale all'uniforme continuità

RIASSUNTO

Fatto 1 Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e A qualunque, allora

$$f \text{ } \alpha\text{-Höld in } A \Rightarrow f \text{ unif. cont. in } A \Rightarrow f \text{ cont. in } A$$

anche per $\alpha = 1$

Fatto 2 Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e A limitato, allora

$$f \text{ lip. in } A \Rightarrow f \text{ } \alpha\text{-Höld in } A \Rightarrow f \text{ } \beta\text{-Höld in } A$$

$\Downarrow$

$$f \text{ unif. cont. in } A$$

$\Downarrow$

$$f \text{ cont. in } A$$

Per $0 < \beta < \alpha \leq 1$

Achtung! Tutte le implicazioni inverse sono FALSE !!!

Notazione Si dice che $f \in C^{0,\alpha}(A)$ se f è α -Höld in A .
 $f \in C^{k,\alpha}(A)$ se $f \in C^k$ in A e
 $f^{(k)} \in C^{0,\alpha}(A)$.

— o — o —