

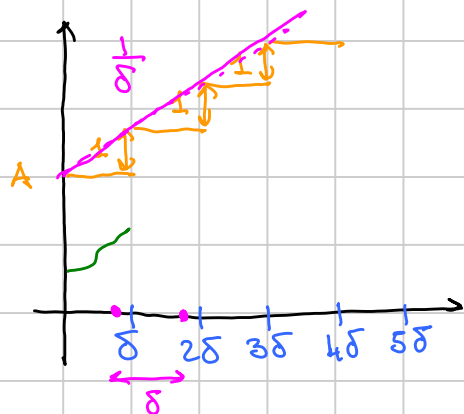
Prop. f unif. continua in $[0, +\infty) \Rightarrow |f(x)| \leq Ax + B$

Dim. Uso la definizione di unif. cont. con $\varepsilon = 1$ (o con $\varepsilon = 1/4$).

Esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \quad \forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0 \quad \text{con } |x - y| \leq \delta$$

Brutta : nel primo tratto $[0, \delta]$
 $|f(x)|$ sta sotto un certo A .
 Passando da un tratto al
 successivo $|f(x)|$ può crescere
 al massimo di 1 rispetto al
 precedente.



Pongo $A := \max \{ |f(x)| : x \in [0, \delta] \}$ $B := \frac{1}{\delta}$

Dimostro per induzione che

$$|f(x)| \leq A + k \quad \forall x \in \overbrace{[k\delta, (k+1)\delta]}^{k\text{-esimo tratto}}$$

Il caso $k=0$ è la definizione di A . Suppongo che valga con un certo k e lo dimostro per $k+1$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x-\delta)| + |f(x) - f(x-\delta)| \leq A + k + 1 \\ &\leq A + k \quad \leq 1 \text{ per unif. cont.} \\ &\text{perché sta nel} \\ &\text{tratto prec. } (x-\delta) \end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che $A + k \leq A + \frac{1}{\delta}x$ per
 ogni $x \in [k\delta, (k+1)\delta]$ ($x \geq k\delta \Rightarrow A + \frac{1}{\delta}x \geq A + \frac{1}{\delta}\delta k = A + k$)

Lemma Sia $a > 0$, sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sia $b > a$.

Supponiamo che

(i) f è unif. continua in $[a, b]$

(ii) f è unif. continua in $[b, +\infty)$

Allora f è unif. continua in $[a, +\infty)$

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$ e uso la def. in $[a, b]$ e $[b, +\infty)$ con $\frac{\varepsilon}{2}$.

Trovo $\delta_1 > 0$ t.c.

$$x \in [a, b], y \in [a, b], |x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x \geq b, y \geq b, |x - y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dico che $\min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ va bene per ogni $x \geq a, y \geq a$.

Ci sono 3 casi

- se x e y sono $\leq b$ allora Ok
- se x e y sono $\geq b$ allora Ok
- resta wlog $x \leq b \leq y$. Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$\begin{array}{ccc} < \frac{\varepsilon}{2} & & < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{unif. cont. in } [a, b] & & \text{unif. cont. in } [b, +\infty) \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array}$$

Prop. $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua + $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

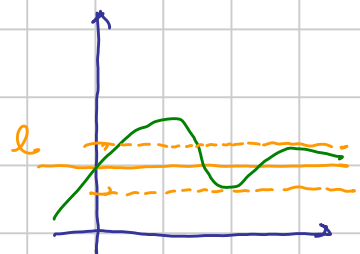
$\Rightarrow f$ è unif. continua in $[a, +\infty)$

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$. Voglio trovare $\delta > 0$ t.c.

$$x \geq a, y \geq a, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Per definizione di limite esiste $k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall x \geq k$$



In particolare

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \underline{\forall x \geq k \quad \forall y \geq k}$$

anche se
lontani tra di
loro

Per Heine - Cantor f è unif. continua
in $[a, k]$, quindi esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\forall x \in [a, k], \forall y \in [a, k], \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$$

Dico che lo stesso δ va bene su tutto $[a, +\infty)$.

Ci sono 3 casi

- $x \geq k$ e $y \geq k$ ~ ok, anche se $|x - y| > \delta$
- x e y in $[a, k]$ ~ ok perché δ l'ho scelto lì
- se wlog $x < k < y$, allora concludo come nel lemma
mettendo k in mezzo.

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. cont. in $[0, +\infty)$? Sì

Dim. È unif. cont. in $[0, 5]$ per H-C.

È unif. cont. in $[5, +\infty)$ perché è lip.

Per il lemma di ricollamento posso concludere

Esempio 2 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è unif. cont. in $(0, 1)$? Sì

Dim. La posso estendere ad una funzione continua in $[0, 1]$.

L'estensione è unif. cont. per H-C in $[0, 1]$

Quindi è unif. cont. anche in $(0, 1)$.

Fatto generale $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. cont. in A e $B \subseteq A$

$\Rightarrow f$ è unif. cont. in B (c'è meno richiesta)

Esempio 3 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è unif. cont. in $(0, +\infty)$? Sì

Lo è in $(0, 1]$ come prima

Lo è in $[1, +\infty)$ perché esiste il limite

Concludo con il lemma di raccoglimento

Esempio 4 $f(x) = \log x$ è unif. cont. in $(0, +\infty)$?

NO: se lo fosse sarebbe estendibile con continuità a $[0, +\infty)$

e in $(3, +\infty)$? Sì, perché è lip!

Esempio 5 $f(x) = \frac{\sin(x^{20})}{x^2}$ è unif. cont. in $(0, +\infty)$?

Sì, come in un esempio prec.

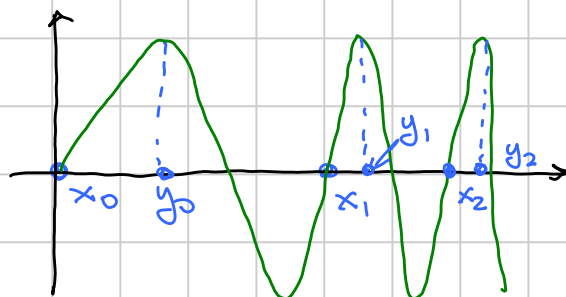
È lip. in $(0, +\infty)$? NO! Basta calcolare la derivata e vedere che non è limitata, ad esempio perché $\limsup_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$

Esempio 6 $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ è unif. cont. in $(0, 1)$?

NO: sarebbe estendibile

Esempio 7 $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e non unif. cont.

Basta prendere $f(x) = \sin(x^2)$. Per dimostrarlo bisogna trovare a mano p.ti x, y vicini con immagini lontane



Idea per dim. alternativa di H-C.

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua
 $\uparrow$
compatto

Fisso $\varepsilon > 0$

Poiché f è continua

$\forall x \in A \exists \delta > 0$ t.c.
" $\delta(\varepsilon, x)$

$y \in (x-\delta, x+\delta) \cap A$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Mi piacerebbe tanto se fosse vero che

$$\inf \{ \delta(\varepsilon, x) : x \in A \} =: \delta > 0$$

Se io riuscissi a dimostrare che $x \rightarrow \delta(\varepsilon, x)$ è una funzione SCI (semicont. inf.), allora essendo A compatto avrebbe minimo, il minimo è $\delta(\varepsilon, x_0)$ per un opportuno $x_0 \in A$, quindi > 0 .

Per definirlo bene, devo prendere in ogni x il valore $\delta(\varepsilon, x)$ maggiore (più grande) che fa tornare la continuità.

Dimostrare che è SCI è un esercizio.

— o — o —