

Prop. Sia A compatto per successioni, sia $\varepsilon > 0$.

Allora posso ricoprire A con un numero finito di intervalli con centro in A e ampiezza ε , cioè esistono un intero $m \geq 1$ ed esistono p.ti $x_1, \dots, x_m \in A$ t.c.

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^m (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$$

Dim. Algoritmo: scelgo $x_1 \in A$ a caso.

Supposto di aver già fissato $x_1, \dots, x_k$ scelgo x_{k+1} t.c. $x_{k+1} \in A$ e

$$x_{k+1} \notin \bigcup_{i=1}^k (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$$

↑
se non lo trovo, vuol dire che gli intervallini precedenti ricoprono

Quindi, o mi fermo strada facendo (equivale a $\emptyset$) o trovo una successione di p.ti x_k con la proprietà che

$$|x_m - x_n| \geq \varepsilon \quad \text{per ogni } m \neq n$$

Essendo A compatto la successione x_n dovrebbe avere una sottosuccessione convergente, ma questo non è possibile perché nessuna sottosucc. può essere di Cauchy



non possiamo
aver infiniti elementi
che distano $\geq \varepsilon$ l'uno
dall'altro.

FUNZIONI SEMICONTINUE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$.

Si dice che f è semicontinua inferiormente in x_0 se

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

(Questo presuppone x_0 p.to di accumulazione. Se è isolato la semicontinuità è gratis)

Si dice che f è semicontinua superiormente in x_0 se

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Brutalmente: $\rightarrow f(x)$ è continua se al limite vale quello che uno si aspetta

$\rightarrow f(x)$ è semicont. inf. (SCI o LSC) se al limite può solo crollare (in basso)

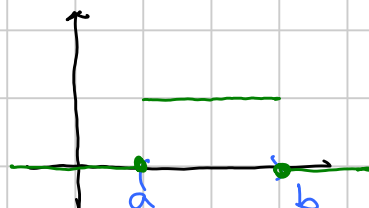
$\rightarrow f(x)$ è semicont. sup (SCS o USC) se al limite può solo diventare molto più grande

Esempi ① Le funzioni continue sono anche SCI e SCS

② La funzione caratteristica di (a, b) , cioè

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a, b) \\ 0 & \text{se } x \notin (a, b) \end{cases}$$

è SCI. Analogamente per le funzioni caratteristiche degli aperti



③ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- SCI se e solo se $a \leq -1$
- SCS se e solo se $a \geq 1$



Def. Si dice che f è SCI in A se è SCI in tutti i pti di A .

Definizioni equivalenti Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è SCI in A se e solo se

(i) vale $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x_0 \in D(A)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

(iii) per ogni successione $A \ni x_n \rightarrow x_\infty \in A$ si ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

Le dimostrazioni sono analoghe al caso della continuità.

Prop. Siano $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni SCI. (SCS)

Allora $f + g$ è SCI. (SCS)

Dim.

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] &\geq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ &\stackrel{\text{teo. alg}}{\geq} f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f + g)(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema (Vero Weierstrass) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) A compatto

(ii) f SCI in A

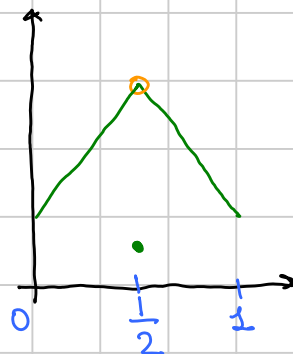
(SCS)

Allora esiste per forza

$$\min \{ f(x) : x \in A \}$$

(MAX)

Oss. Il max potrebbe non esistere,
vedi figura/e



Dim. Sia $l = \inf \{ f(x) : x \in A \} = \inf f(A)$.

Per il solito lemma esiste $y_n \in f(A)$ t.c. $y_n \rightarrow l$.

Per definizione di immagine esistono $x_n \in A$ t.c. $y_n = f(x_n)$
cioè

$$f(x_n) \rightarrow l \quad (\text{succ. minimizzante})$$

Poiché A è cpt. esiste una s.succ. conv. ad un elemento di A :

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in A$$

Per semicontinuità

$$l \leq f(x_\infty) \leq \liminf f(x_{n_k}) = \lim f(x_n) = l$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 l è l'inf def. di SCI perché $f(x_n) \rightarrow l$
dunque tutte le s.succ. $\rightarrow l$

Essendo RHS = LHS, ci sono tutte uguaglianze, quindi $f(x_\infty) = l$.

Osservazione le funzioni SCI in un insieme A non sono uno spazio vettoriale. Il problema è il prodotto per costanti negative, anzi

$$f \text{ è SCI} \iff -f \text{ è SCS}$$

Segue dal fatto che mettendo un segno - davanti liminf e liinsup si scambiano

Moltiplicare per costanti positive presenta LSC e USC.

In generale il prodotto si comporta bene solo moltiplicando per funzioni positive.

Esempio La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è SCI e non è SCs perché ci sono succ. in $\mathbb{Q}$ che tendono a numeri irrazionali e viceversa.

Volendo è SCI in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e SCs in $\mathbb{Q}$.

— 0 — 0 —>