

Prop. 1 (Le funzioni continue mandano compatti per successioni in compatti per successioni).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) A compatto per successioni

(ii) f continua.

Allora $f(A)$ è compatto per successioni.

Dim. Sia y_n una successione contenuta in $f(A)$.

Per definizione di immagine esistono $x_n \in A$ t.c. $y_n = f(x_n)$.

Poiché A è cpt. per successioni esiste una s.succ.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in A.$$

Poiché f è continua (quindi anche continua per succ.)

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty)$$

"

"

$$y_{n_k} \rightarrow y_\infty \in f(A).$$

Dim. di W. "suolutata"

Se A è cpt. per successioni e f è continua, allora $f(A)$ è cpt. per successioni, quindi chiuso e limitato, quindi ammette max e min.

— o — o —

Prop. 2 (Le funzioni continue mandano compatti per ricoprimenti in compatti per ricoprimenti)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) A è cpt. per ricoprimenti

(ii) f è continua.

Allora $f(A)$ è compatto per ricoprimenti.

Dim. Prendiamo un qualunque ricoprimento aperto di $f(A)$

$$f(A) = \bigcup_{i \in I} V_i \quad V_i \text{ aperto in } f(A)$$

Pongo $U_i = f^{-1}(V_i)$ e ho che

$$A = \bigcup_{i \in I} U_i \quad (\text{ovvio})$$

e gli U_i sono aperti in A per la definizione topologica di continuità.

Poiché A è cpt. per ricoprimenti, ne basta un numero finito

$$A = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \quad \text{con } i_1, \dots, i_m \in I.$$

Ma allora $f(A) = V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}$, quindi ne basta un numero finito per ricoprire $f(A)$.

Resta da vedere che limitato + chiuso $\Rightarrow$ cpt. per ricoprimenti

Lemma (raggio magico) Sia A un insieme compatto per successioni. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A . Allora esiste un raggio $r > 0$ con questa proprietà

$$\forall x \in A, \exists i \in I \text{ t.c. } (x-r, x+r) \cap A \subseteq U_i$$

Quello che è ovvio è che

$$\forall x \in A \exists r > 0 \exists i \text{ t.c. } (x-r, x+r) \cap A \subseteq U_i$$

La cosa non ovvia è che si può fare con un raggio r universale.

Dim. Per assurdo supponiamo che tutti i raggi vadano male.

$$\forall r > 0 \exists x \in A \forall i \in I \quad (x-r, x+r) \cap A \not\subseteq U_i$$

Me la gioco con $r = \frac{1}{k}$. Trovo un p.to $x_k \in A$ tale

$(x_k - \frac{1}{k}, x_k + \frac{1}{k}) \cap A$ non è contenuto in nessun M_i .

Per compattezza x_k tende, a meno di sottosucc., a qualcosa, diciamo

$$x_{k_n} \longrightarrow x_\infty \in A.$$



Ora x_∞ sta in un certo M_{i_∞} , quindi $\exists r_\infty$ b.c.

$$(x_\infty - r_\infty, x_\infty + r_\infty) \cap A \subseteq M_{i_\infty}$$

Ora definitivamente $x_{k_n} \in (x_\infty - \frac{r_\infty}{2}, x_\infty + \frac{r_\infty}{2})$ e quindi hanno garantito un raggio

minimo uguale a $\frac{r_\infty}{2}$, il che contraddice il fatto che il raggio $\frac{1}{k_n}$ non vada bene.

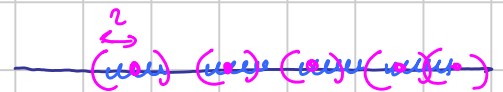
— o — o —

Dim. che compattezza $\Rightarrow$ compattezza per ricoprimenti

Supponiamo A limitato più chiuso, quindi anche cpt. per succ. e prendiamo un qualunque ricoprimento M_i di A .

Questo ricoprimento avrà un raggio magico r

Ora posso ricoprire tutto A con un numero finito di intervalli di ampiezza r , cioè esiste un numero finito di pti $a_1, \dots, a_m$ t.c.



$$A \subseteq (a_1 - r, a_1 + r) \cup \dots \cup (a_m - r, a_m + r)$$

Ciascuno di questi intervalli è contenuto in qualche M_i perché l'ampiezza è il raggio magico. Quindi

$$A \subseteq \underbrace{M_{i_1}}_{\text{contiene } (a_1 - r, a_1 + r)} \cup \dots \cup \underbrace{M_{i_m}}_{\text{contiene } (a_m - r, a_m + r)}$$

Dim. alternativa di Weierstrass

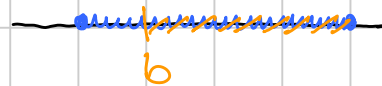
Prendo l'insieme A , chiuso e limitato.

In particolare $A \subseteq [-M, M]$ per un opportuno M .

Prendo

$$l = \inf \{ f(x) : x \in A \}$$

Dato $b \in [-M, M]$ andiamo a vedere



$$\inf \{ f(x) : x \in A \text{ e } x \geq b \}$$

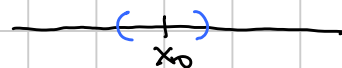
Questo inf può valere l o più di l . Inoltre più b è grande più l'inf sarà grande. Considero

$$x_0 = \sup \{ b \in [-M, M] : \inf \{ f(x) : x \in A \text{ e } x \geq b \} = l \}$$

Dico che $x_0 \in A$ e x_0 è un p.to di minimo, cioè $f(x_0) = l$.

Perché $x_0 \in A$? Se $x_0 \notin A$, allora

non sta in A tutto un intorno $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$



Ma allora

$$\inf \{ f(x) : x \in A \text{ e } x \geq x_0 + \epsilon \} = \inf \{ f(x) : x \in A \text{ e } x \geq x_0 - \epsilon \} = l$$

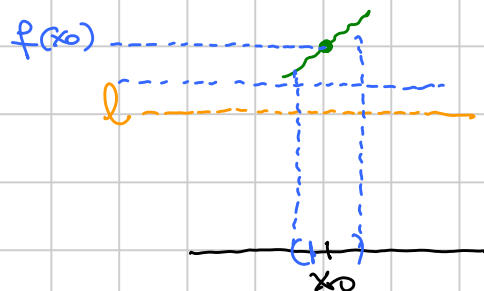
← stesso insieme →

il che contraddice che x_0 sia il sup.

Perché $f(x_0) = l$? Se non fosse così, allora sarebbe $f(x_0) > l$.

Per continuità esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$f(x) \geq \frac{f(x_0) + l}{2}$$



per ogni $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap A$.

Ma allora

$\inf \{ f(x) : x \in A \text{ e } x \geq x_0 - \frac{\epsilon}{2} \}$ è il minimo tra 2 quantità

- l'inf tra $[x_0 - \frac{\epsilon}{2}, x_0 + \frac{\epsilon}{2}]$ e questo è $\geq \frac{f(x_0) + l}{2}$
- l'inf per $x \geq x_0 + \frac{\epsilon}{2}$ che è $> l$ perché altrimenti x_0 non sarebbe il sup.

Ne segue che l'inf per $x \geq x_0 - \frac{\epsilon}{2}$ è maggiore di l , il

che contraddice che x_0 sia il sup.

— 0 — 0 —