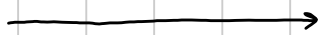
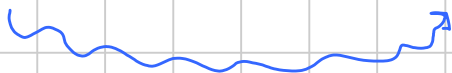


Assiomi di $\mathbb{R}$



Weierstrass



Teorema di Bolzano - Weierstrass

Sia a_n succ. di numeri reali.

Supponiamo che a_n sia limitata ($\exists M \in \mathbb{R}$ b.c. $|a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$)

Allora esiste una sottosuccessione che ha limite reale, cioè
esiste una successione n_k strettamente crescente di numeri
naturali ed esiste $a_\infty \in \mathbb{R}$ tale che

$$a_{n_k} \rightarrow a_\infty$$

Def. Essendo la successione limitata si avrà che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$$

Per la caratterizzazione del $\limsup$, sappiamo che esiste una
s.succ. che converge ad L .

[Potrei fare la stessa cosa con il $\liminf$].

Corollario Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme limitato e chiuso.

Sia a_n una succ. contenuta in D , cioè $a_n \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora esiste una sottosuccessione che converge ad un
elemento di D .

Anzi, ogni sottosuccessione che converge lo fa ad un
elemento di D .

Dim. Essendo D limitato, ammette almeno una s.succ. convergente

$$a_{n_k} \rightarrow a_\infty \in \mathbb{R}$$

Voglio dim. che $a_\infty \in D$.



Per definizione di limite, per ogni $r > 0$ trovo elementi della successione in $(a_\infty - r, a_\infty + r)$, quindi trovo elementi di D in $(a_\infty - r, a_\infty + r)$. Ma allora $a_\infty \in \text{Clos}(D)$, ma essendo D chiuso $a_\infty \in D$.

Def. Un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO se e solo se è limitato + chiuso.

Ri-enunciato Se $D \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e a_n è una succ. a valori in D , allora per forza ammette una s.succ. convergente ad un elemento di D .

Teorema di Weierstrass Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) D è compatto

(ii) f è continua

Allora esistono per forza

$$\min \{ f(x) : x \in D \}$$

$$\max \{ f(x) : x \in D \}$$

Dim. La faccio solo per il minimo (per il max è uguale).

Considero l'immagine

$$\{ f(x) : x \in D \}$$

Sicuramente esiste

$$I = \inf \{ f(x) : x \in D \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Per un lemma fatto a suo tempo esiste una successione di pti y_n nell'immagine tale che $y_n \rightarrow I$.

Per definizione di immagine esistono $x_n \in D$ t.c. $f(x_n) = y_n$.

Ora poiché D è compatto esiste una s.succ. convergente

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \quad (\text{no candidato pto di minimo})$$

Voglio dimostrare che $f(x_\infty) = I$. D'altra parte per la continuità di $f(x)$ si avrà che

$$f(x_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = I$$

$\uparrow$ continuità $\uparrow$ defn. di x_{n_k} $\uparrow$ s.succ. di y_n

— o — o —

← solo ora si esclude che I possa essere $-\infty$

Oss. Gli y_n , il pto I , ed il minimo stanno sull'asse y .
Gli x_n stanno sull'asse x , ed in particolare in D .

Oss. Gli x_n si chiamano "successione minimizzante" perché

$$f(x_{n_k}) \rightarrow I = \inf$$

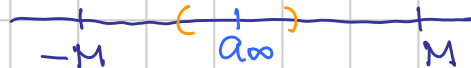
— o — o —

Dimostrazione di B-W senza usare il limsup

Per ipotesi abbiamo una succ. a_n con

$$-M \leq a_n \leq M$$

Pongo



$$a_\infty := \sup \{ x \in [-M, M] : a_n \geq x \text{ per infiniti indici} \}$$

Siamo sicuri che sto facendo il sup di un insieme $\neq \emptyset$ (contiene $x = -M$) e limitato superiormente (non contiene elementi $> M$).

Quindi $a_\infty \in \mathbb{R}$. Dico che esiste una s.succ. che converge ad a_∞ :

$$a_{n_k} \rightarrow a_\infty$$

Fatto fondamentale Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono infiniti indici n per cui

$$a_\infty - \varepsilon \leq a_n \leq a_\infty + \varepsilon.$$

Perché? Gli indici per cui $a_n > a_\infty + \varepsilon$ sono un numero finito, gli indici per cui $a_n \geq a_\infty - \varepsilon$ sono infiniti (altrimenti a_∞ sarebbe più piccolo)

Costruisco ora la s.succ. $a_{n_k} \rightarrow a_\infty$ con questo algoritmo
 $\rightarrow$ scelgo a_{n_0} a caso

$\rightarrow$ supponendo di aver scelto $a_{n_0}, a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$ uso il fatto fondamentale con $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ $\nwarrow$ basta che vada a 0

e scelgo un indice $n_{k+1} > n_k$ in maniera tale che

$$a_\infty - \frac{1}{k+1} \leq a_{n_{k+1}} \leq a_\infty + \frac{1}{k+1}$$

(posso perché ho infiniti indici a disposizione).

Per i carabinieri $a_{n_k} \rightarrow a_\infty$.
— 0 — 0 —

Analogamente funzionava con

$$b_\infty := \inf \{x \in [-M, M] : a_n \leq x \text{ per infiniti } n\}$$

Oss. a_∞ è proprio il $\limsup$
 b_∞ è proprio il $\liminf$