

Formula di TAYLOR

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \boxed{O(x^n)}$$

resto di Peano

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

c sta tra 0 e x

resto di Lagrange

Più in generale, con centro in x_0 generico,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + O((x-x_0)^n)$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

c sta tra x_0 e x

Oss. Basta dim. quelle con centro in $x_0=0$. Per le altre si considera la funzione $g(x) = f(x-x_0)$ (sposto l'origine in x_0).

Teorema (Taylor con resto di Peano) Sia $r>0$ e sia

$$f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ (ordine dello sviluppo)

Supponiamo che

(i) f sia derivabile $(n-1)$ volte in $(-r, r)$

(ii) f sia derivabile n volte in $x_0=0$

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + O(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e $P_n(x)$ è dato dalla solita formula.

Teorema (Taylor con resto di Lagrange)

Siano $1, f$ ed n come prima.

Supponiamo che

(i) f sia derivabile $(n+1)$ volte in $(-1, 1)$

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ per cui vale il solito sviluppo, ed è dato dalla solita formula,

— o — o —

Via classica alla dimostrazione

Lemma 1 Consideriamo un monomio $g(x) = a_k x^k$, con $a_k \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

Allora

$$g^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ k! a_k & \text{se } i = k \end{cases}$$

Dici Quasi ovvia... $g^{(i)}(x) = k(k-1)\dots(k-i+1) x^{k-i} a_k$ se $i \leq k$ e $g^{(i)}(x) = 0$ se $i > k$.

Voleudo posso riscrivere

$$g^{(i)}(x) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} a_k & \text{se } i \leq k \\ 0 & \text{se } i > k \end{cases} \quad \text{induzione}$$

Sostituendo $x=0$ si salva solo il caso $i=k$.

Lemma 2 Consideriamo ora un polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Allora

$$P^{(i)}(0) = \begin{cases} i! a_i & \text{se } i \leq n \\ 0 & \text{se } i > n \end{cases}$$

Dim. Basta applicare l' enunciato precedente ai singoli monomi

$$p^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^n [a_k x^k]^{(i)} = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(k-i)!} a_k x^{k-i}$$

Quando sostituisco $x=0$ resta solo il termine con $k=i$

Lemma 3 Sia $f(x)$ una funzione come nel teorema, e sia

$$p(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

= funzione - polinomio di Taylor

Allora

$$p^{(i)}(0) = 0 \quad \text{per ogni } i = 0, 1, \dots, n$$

Dim.

$$p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) - \left[\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right]^{(i)}$$

$$= f^{(i)}(0) - \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dal lemma} \\ \text{precedente}}}{i!} = 0$$

Oss. Abbiamo così dimostrato la proprietà fondamentale: le prime n derivate del polinomio di Taylor, calcolate in $x=0$, coincidono con le prime n derivate della $f(x)$

Lemma 4 (Peano decisivo) Sia $\varphi: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

(i) derivabile $(n-1)$ volte in $(-1, 1)$

(ii) derivabile n volte in 0

(iii) $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$.

Allora

$$\varphi(x) = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Dim. Devo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} = 0$$

Questo si dimostra con n colpi di Hôpital ... quasi ...

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{n x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n! x} = \frac{0}{0}$$

Se avessi che $\varphi^{(n)}$ esiste in tutto l'intervallo potrei concludere con Hôpital, ma sono stato tirchiuso con le ipotesi ... 😞
Per concludere uso la definizione di derivata in $x=0$ per la derivata $(n-1)$ esima.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n! x} &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(0)}{x} \\ &= \varphi^{(n)}(0) = 0 \end{aligned}$$

Def. di derivata
di $\varphi^{(n-1)}$ calcolata in $x_0 = 0$.

Dim. Taylor - Peano Lemma 1+2+3+4

Lemma 5 (Lagrange decisivo) Sia $\varphi: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

(i) φ è derivabile $(n+1)$ volte in $(-1, 1)$

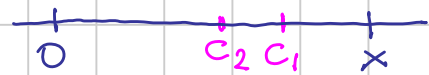
(ii) $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$

Allora per ogni $x \in (-1, 1)$ esiste almeno un pto c fra 0 e x tale che

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Dim.

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} \stackrel{\uparrow \text{Cauchy}}{=}$$



$$\begin{aligned} \text{deriv. num.} &\rightarrow \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)c_1^n} = \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(0)}{(n+1)[c_1^n - 0^n]} \stackrel{\uparrow \text{Cauchy}}{=} \\ \text{deriv. denom.} &\rightarrow \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)n c_2^{n-1}} \end{aligned}$$

Proseguo allo stesso modo fino a quando alla fine resto con

$$\frac{\varphi^{(n)}(c_n)}{(n+1)! c_n} = \frac{\varphi^{(n)}(c_n) - \varphi^{(n)}(0)}{(n+1)!(c_n - 0)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

e questo completa la dimostrazione di Taylor-Lagrange

Dim. alternativa di Taylor Lagrange (segnalata da Francisco sul Forum)

$$f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (a-x_0)^k = R_n$$

$$\text{voglio dim. che } R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (a-x_0)^{n+1}$$

Considero la funzione

$$g(x) = f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (a-x)^k + (a-x)^{n+1} \frac{R_n}{(a-x_0)^{n+1}}$$

$$\text{Allora } g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(x_0) = R_n - R_n = 0$$

Per Rolle esiste un pto c tra x_0 e a in cui $g'(c) = 0$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (a-x)^k + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} k (a-x)^{k-1} \\
&\quad + (n+1) (a-x)^n \frac{R_n}{(a-x_0)^{n+1}} \\
&= - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (a-x)^{k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (a-x)^{k-1} \\
&\quad + (n+1) (a-x)^n \frac{R_n}{(a-x_0)^{n+1}} \\
&= - \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n)!} (a-x)^n + (n+1) (a-x)^n \frac{R_n}{(a-x_0)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Se imponiamo che per $x=c$ si annulli otteniamo

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (a-x_0)^{n+1}$$

— o — o —