

CESARO-STOLZ, ovvero HÔPITAL per successioni

Sotto certe ipotesi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Cesàro - Stolz 1 (Equivalente di Hôpital $\frac{0}{0}$)

Siano a_n e b_n due successioni t.c.

(i) $a_n \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow 0$

(ii) b_n monotona strettamente decrescente (in particolare $b_n > 0$)

Allora

$$\liminf \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Dim. Dimostro solo la parte destra supponendo il $\limsup = L \in \mathbb{R}$.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratterizzazione esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Occhio: il denominatore è negativo, quindi giro tutto:

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq L + \varepsilon \quad \text{e ora posso moltiplicare ottenendo}$$

$$a_n - a_{n+1} \leq (L + \varepsilon)(b_n - b_{n+1}) \quad \forall n \geq n_0$$

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ 0 \quad b_{n_0} \quad b_n \end{array}$$

Per ogni $m > n \geq n_0$ abbiamo che

$$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \leq (L+\varepsilon) \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) = (L+\varepsilon)(b_n - b_m)$$

e di conseguenza

$$\frac{a_m - a_n}{b_n - b_m} \leq L + \varepsilon$$

Passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

da cui passando al limsup

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon.$$

Idea brutale

$$\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a_m - a_n}{b_m - b_n} \sim L + \varepsilon$$

ragionevole
se n è grande

Cesàro - Stolz 2 (Caso analogo a Hôp $\frac{\infty}{\infty}$)

Siano a_n e b_n due successioni tali che

(i) $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$

(ii) b_n strettamente crescente,

Allora vale la solita catena a 4

Dim. Facciamo sempre la solita disug. dx. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e otteniamo $n_0 \in \mathbb{N}$ b.c.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Ora il denominatore è positivo, quindi posso moltiplicare:

$$a_{n+1} - a_n \leq (L+\varepsilon)(b_{n+1} - b_n) \quad \forall n \geq n_0$$

Ora fisso $n > m \geq n_0$ e ho

$$a_m - a_n = \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq (L+\varepsilon) \sum_{k=m}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = (L+\varepsilon)(b_n - b_m)$$

da cui

$$\frac{a_m}{b_m} = \frac{a_n - a_m + a_m}{b_m} \leq \frac{(L+\varepsilon)(b_n - b_m) + a_m}{b_m}$$

Tengo m fisso e faccio tendere $n \rightarrow +\infty$. Il RHS $\rightarrow L+\varepsilon$ e quindi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon.$$

— o — o —

Teorema delle medie di Cesàro

Sia a_n una successione.
Introduco le sue medie

$$M_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

(media dei primi n -termini)

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf M_n \leq \limsup M_n \leq \limsup a_n$$

Dim 1 Si può fare direttamente usando gli ε e gli n_0
(esercizio valido)

Dim 2 Pongo $S_n := a_1 + \dots + a_n$, pongo $D_n = n$ e uso
Stolz-Cesàro

$M_n = \frac{S_n}{D_n}$ ma liminf / sup di questo sono collegati

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{D_{n+1} - D_n} = \frac{a_{n+1}}{1} \quad \text{da cui si conclude.}$$

— 0 — 0 —

Corollario 2 (rapporto $\rightarrow$ radice)

Devo fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$. Passando all'esponenziale mi riduco a fare il limite di

$$\frac{\log(a_n)}{n}$$

Facendo Cesàro - Stolz ritrovo

$$\frac{\log(a_{n+1}) - \log a_n}{(n+1) - n} = \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

da cui si chiude.

— 0 — 0 —

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = \arctan x_n \\ x_0 = 2015 \end{cases}$. Abbiamo dim che $x_n \rightarrow 0$,
voglio sapere come

Supponiamo di aver congetturato che $x_n \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$. Voglio trovare c . Devo fare il limite di $\sqrt{n} x_n$.

Faccio vedere il limite di $n x_n^2$:

$$\lim n x_n^2 = \lim \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} \stackrel{\text{C.S.}}{=} \lim \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim \frac{1}{\frac{1}{\arctan^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \arctan^2 x}{x^2 - \arctan^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^2 - x^2 + \frac{2}{3} x^4 + o(x^4)} \rightarrow \frac{3}{2} = c^2 \end{aligned}$$

Stessa cosa in brutal mode: $x_n = \frac{c}{n^a}$

Impongo $x_{n+1} = \arctan x_n$

$$\frac{c}{(n+1)^a} = \arctan \frac{c}{n^a} = \frac{c}{n^a} - \frac{1}{3} \frac{c^3}{n^{3a}}$$

Moltiplico per n^a :

$$\frac{c n^a}{(n+1)^a} = c - \frac{1}{3} \frac{c^3}{n^{2a}}$$

"

$$c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a} = c - \frac{1}{3} \frac{c^3}{n^{2a}}$$

$$\cancel{c} - \frac{c a}{n} = \cancel{c} - \frac{1}{3} \frac{c^3}{n^{2a}} \rightsquigarrow$$

$$2a = 1 \rightsquigarrow a = \frac{1}{2}$$

$$c^3 = 3ac$$

$$c^2 = \frac{3}{2}$$

Esempio

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 7 \\ x_0 = 2015 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\log(x_n))}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log(\log(x_{n+1})) - \log \log x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{\log x_{n+1}}{\log x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{\log(x_n^2 - 8x_n + 7)}{\log x_n} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{\log(x^2 - 8x + 7)}{\log x} = \log 2 \end{aligned}$$

In alternativa

$\frac{1}{n} \log(\log x_n) = \log \left[\sqrt[n]{\log x_n} \right]$. Quello dentro lo faccio con rapporto $\rightarrow$ radice riducendomi a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log x_{n+1}}{\log x_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - 8x + 7)}{\log x} = 2$$