

FIL ROUGE DI ANALISI 1

Azioni di $\mathbb{R} \Rightarrow \dots \Rightarrow W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L$

 $\Downarrow$
 $\Downarrow$

WEIERSTRASS

H

M

ROLLE

 $\Downarrow$

CAUCHY

T

LAGRANGE

HOPITAL

TAYLOR

MONOTONIA

Teorema di WEIERSTRASS (Versione edulcorata)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esistono per forza
con estremi

$$\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

Dove cerco i p.ti di max / min ?

- ① Staz. int. : p.ti $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$
- ② Sing. int. : p.ti $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0)$ non esiste
- ③ Bordo : p.ti $x_0 \in \{a, b\}$

Dim. Sia x_0 p.to di max (wlog)

→ se $x_0 \in \{a, b\}$ sta in ③ ed è ok

→ se $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0)$ non esiste, allora ok in ②

→ Resta il caso in cui $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0)$ esiste. Devo dim. che $f'(x_0) = 0$

Lemma Se $x_0 \in (a, b)$ è p.to di max, e $f'(x_0)$ esiste, allora $f'(x_0) = 0$.

Dim. 1 Via monotonia 1. Supponiamo per assurdo che

- $f'(x_0) > 0$. Allora un po' a dx di x_0 si ha $f(x) > f(x_0)$
il che è contro l'essere x_0 p.to di max
- $f'(x_0) < 0$. Allora un po' a sx di x_0 si ha $f(x) > f(x_0)$
il che è assurdo come prima.

Resta solo $f'(x_0) = 0$

Dim. 2 Per via diretta. Considero il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Per $h > 0$ si ha denom. > 0 e num. ≤ 0 , quindi frazione ≤ 0
Passando al limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

- Per $h < 0$ si ha denom. < 0 e num. ≤ 0 , quindi fraz. ≥ 0 .
Passando al limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Resta solo $f'(x_0) = 0$

— 0 — 0 —

Esercizio classico Supponiamo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile.

Supponiamo che

$$f(a) = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

Cosa possiamo dire di $f'(a)$. E se fosse minimo?

E se fosse in b ?

— 0 — 0 —

Teorema di ROLLE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a, b]$

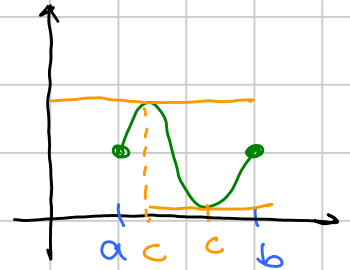
(ii) f derivabile in (a, b) (se lo è ovunque, ancora meglio)

(iii) $f(a) = f(b)$.

Allora

$$\exists c \in (a, b) \text{ t.c. } f'(c) = 0$$

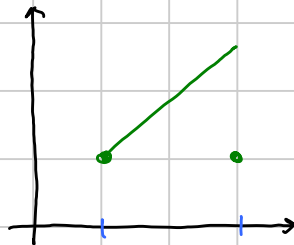
Disegno Ovviamente c può non essere unico



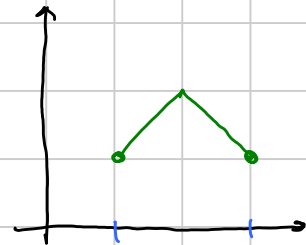
Ottimalità delle ipotesi



manca (iii)



manca (i)



manca (ii)

Dim. Per $\forall$ sappiamo che esistono max e min.

Ci sono 2 casi

- ① Se almeno uno dei pti di max/min sta in (a, b) , allora per forza lì si annulla f' (non può essere singolare per la (ii))
- ② Se i pti di max/min sono sul bordo, per la (iii) la funzione è costante, ma a quel pto ogni $c \in (a, b)$ va bene.

— o — o —

Oss. Nell'ipotesi (ii) si assume solo la derivabilità, ma non la continuità della derivata

Teorema di CAUCHY Siano $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f e g continue in $[a,b]$

(ii) f e g derivabili in (a,b) .

Allora esiste $c \in (a,b)$ (non nec. unico) tale che

$$[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c)$$

Se inoltre assumiamo anche che

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

allora si ha che $g(b) \neq g(a)$ da cui dividendo ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Esempio $[a,b] = [-1,1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. Allora

$f(b) - f(a) = 0$, $g(b) - g(a) = 2$ quindi nella 2ª tesi LHS = 0.

Tuttavia non c'è nessun c che rende = 0 il RHS, perché $f'(x) = 2x$, quindi dovrei prendere $c = 0$ ma allora anche $g'(c) = 0$.

Dim. Considero la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

Proprietà di $\varphi(x)$:

(i) continua in $[a,b]$] comb. lin. di $f(x)$ e $g(x)$

(ii) derivabile in (a,b)]

(iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$ (basta sostituire e fare il conto)

Allora per Rolle esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c.

$$\varphi'(c) = 0$$

$$\varphi'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x)$$

Il fatto che $\varphi'(c) = 0$ è equivalente alla prima tesi.

Per la 2ª tesi devo dimostrare solo che $g(b) \neq g(a)$.

Supponiamo per assurdo che sia $g(b) = g(a)$. Allora posso applicare Rolle a $g(x)$ e ottenere un pto $c \in (a, b)$ t.c. $g'(c) = 0$, il che è contro l'ipotesi (iii).

— o — o —

Teorema di Lagrange Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) f continua in $[a, b]$
- (ii) f derivabile in (a, b) .

Allora

$$\exists c \in (a, b) \text{ t.c. } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Dim 1 La tesi è equivalente a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}$$

E questo segue da Cauchy con $g(x) = x$ (che ha $g'(c) = 1$) per la quale vale la 2ª tesi di Cauchy.

— o — o —

Interpretazione geometrica Nella formula della dim. si ha

→ LHS = coeff. ang. retta PQ

→ RHS = coeff. ang. tangente nel pto del grafico con a.c.



Quindi Lagrange dice che $\exists c \in (a, b)$ in cui la retta tangente è $\parallel$ retta PQ

Dtm. 2 Considero

$$\varphi(x) = f(x) - \text{retta PQ}$$

Si ha che $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, quindi posso applicare Rolle a $\varphi(x)$, ottenendo che esiste $c \in (a, b)$ t.c. $\varphi'(c) = 0$, cioè

$$\begin{aligned}\varphi'(c) &= \text{derivata della retta PQ} \\ &= \text{coeff. angolare retta PQ}\end{aligned}$$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

— o — o —

Oss. La dim. 2 non è altro che la dimostrazione di Cauchy nel caso $g(x) = x$.

Oss. Da Lagrange a Cauchy

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

$$g(b) - g(a) = g'(c) (b - a)$$

Divido e... NON VA BENE, perché il c sopra e sotto potrebbe non essere lo stesso.

— o — o —