

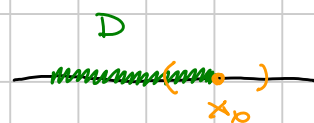
LIMINF E LIMSUP DI FUNZIONI

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

In generale $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ (anche x_0^+ e x_0^-).

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, sia $x_0 \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che x_0 sia un p.to di accumulazione per D , cioè
 $\forall r > 0$ l'insieme $[(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Allora ci sono due casi:



1 Se per ogni $r > 0$ si ha che

$$\sup \{ f(x) : x \in [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \} = +\infty$$

allora si pone

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

2 Altrimenti vuol dire che $\exists r_0 > 0$ b.c.

$$S_r := \sup \{ f(x) : x \in \dots \} < +\infty \quad \forall r < r_0$$

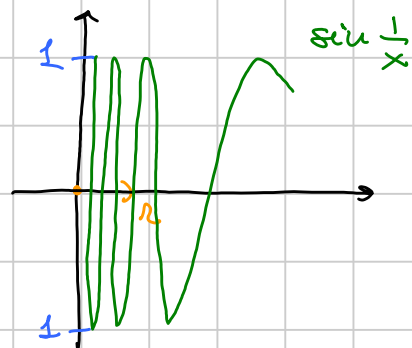
Inoltre per ogni $0 < r_1 < r_2$ si ha che $S_{r_1} \leq S_{r_2}$, quindi
 S_r ha limite per $r \rightarrow 0^+$ e si pone

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} S_r = \inf_{r > 0} S_r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Analogamente si definisce il $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$, facendo sostanzialmente

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} I_r = \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf \{ f(x) : x \in [(x_0 - r, x_0 + r) \cap D] \setminus \{x_0\} \}$$

Esempio 1 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ $x_0 = 0^+$
 $D = (0, +\infty)$



$$\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup \{ f(x) : x \in (0, \epsilon) \}$$

$= 1 \quad \forall \epsilon > 0$

$$> \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Analogamente $\liminf_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} = -1.$

— 0 — 0 —

I teoremi di confronto sono analoghi alle successioni
 Anche per i teoremi algebrici la situazione è la stessa, cioè si può dire molto poco.

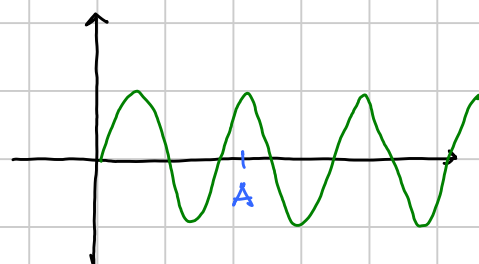
— 0 — 0 —

Esempio 2 $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ $D = \mathbb{R}$

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sup \{ f(x) : x > A \}$$

$= 1 \text{ per ogni } A > 0$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 = 1$$



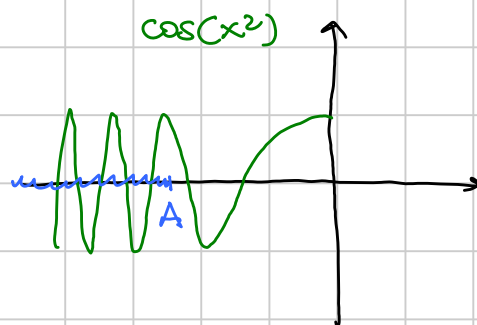
$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \inf \{ f(x) : x > A \} = -1$$

$= -1 \text{ per ogni } A > 0$

Esempio 3 $\limsup_{x \rightarrow -\infty} \cos x^2$ $\liminf_{x \rightarrow -\infty} \cos x^2$

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$= \lim_{A \rightarrow -\infty} \sup \{ f(x) : x < A \} = 1$$



Analogamente $\liminf_{x \rightarrow -\infty} \cos(x^2) = -1.$

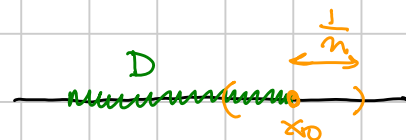
— 0 — 0 —

CARATTERIZZAZIONE DI LIMSUP COME MAXLIM

Caso 1 $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \exists x_n \rightarrow x_0 \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$
 tale che
 $f(x_n) \rightarrow +\infty$

Dim. $\Rightarrow$ Ipotesi: $\limsup = +\infty$ Tesi: $\exists$ successione
 basta tendere a 0

Uso ampiezza $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Per ipotesi
 nella zona



$$\left[\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right) \cap D \right] \setminus \{x_0\}$$

Il sup della funzione è $+\infty$, quindi esiste x_n nella zona in cui
 $f(x_n) \geq n$. (posso superare ogni barriera, quindi anche n)
 basta tendere a $+\infty$

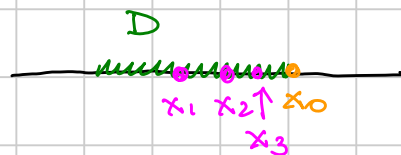
La successione x_n ha la proprietà richiesta: infatti

$$x_0 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_0 + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow x_0$$

$$f(x_n) \geq n \Rightarrow f(x_n) \rightarrow +\infty$$

$\Leftarrow$ Ipotesi: $\exists$ succ. Tesi: $\limsup = +\infty$

Poiché $x_n \rightarrow x_0$ e $f(x_n) \rightarrow +\infty$ è
 chiaro che



$\sup \{ f(x) : x \in [(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D] \setminus \{x_0\} \} = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$
 perché bastano i p.ti della succ. per passare ogni barriera.
 Quindi $\limsup = +\infty$

Caso 2 $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Allora succedono 2 cose

- (i) $\exists x_n \rightarrow x_0 \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ b.c. $f(x_n) \rightarrow L$
(ii) per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ con $x_n \in D \setminus \{x_0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
se $f(x_n) \rightarrow M$, allora $M \leq L$

Brutalmente: L è il massimo limite possibile per $f(x_n)$ quando $x_n \rightarrow x_0$

Dim. Devo costruire x_n . Per ipotesi $\limsup = L$, quindi

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \underbrace{\sup \{ f(x) : x \in \dots \}}_{S_r} = L$$

Fisso $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Per ipotesi esiste $r_n > 0$ b.c.

posso chiedermi perché
vale in tutti gli r
abb. piccoli
 $r_n \leq \frac{1}{n}$ e

$$L \leq S_{r_n} \leq L + \frac{1}{n}$$

↑
perché tutti

gli S_r sono $\geq L$

Ma allora esiste $x_n \in [(x_0 - r_n, x_0 + r_n) \cap D] \setminus \{x_0\}$ tale che

$$L - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq L + \frac{1}{n}$$

se non esistesse un
p.to con questa proprietà
si avrebbe $S_{r_n} \leq L - \frac{1}{n}$
il che è falso

↑
vera per ogni p.to
nell'intervallo $(x_0 - r_n, x_0 + r_n) \cap D \dots$

Da questa è automatico che $f(x_n) \rightarrow L$.

Inoltre $x_n \rightarrow x_0$ perché $r_n \rightarrow 0$ e

$$x_0 - r_n \leq x_n \leq x_0 + r_n$$

Questo dimostra (i).



Per dimostrare (ii) basta osservare che
fissato $\varepsilon > 0 \exists r > 0$ b.c.

~~un numero~~
 x_1, x_2, x_3, x_0

$$S_r \leq L + \varepsilon$$

Inoltre definitivamente $x_n \in (x_0 - r, x_0 + r)$, quindi
definitivamente $f(x_n) \leq L + \varepsilon$, quindi se $f(x_n)$ ha limite M
per forza

$$M \leq L + \varepsilon$$

Essendo vero per ogni $\varepsilon > 0$, per forza $M \leq L$.

— 0 — 0 —

Caso 3

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

$$f(x_n) \rightarrow -\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

— 0 — 0 —