

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right) \\ x_1 = \alpha > 0 \end{cases} \quad x_{n+1} = x_n^2 + x_n \frac{1}{n}$

Studiare il comportamento al variare di α .

Oss. Supponiamo che $x_n \rightarrow l$. Chi può essere l ?

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n+1} & = & x_n^2 & + & x_n \cdot \frac{1}{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ l & = & l^2 & & 0 & \text{(se } l \text{ è reale)} & \end{array} \quad l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Anche $l = +\infty$ sembra essere un limite possibile.

Ci aspettiamo un effetto soglia: esiste $\alpha_0 > 0$ t.c.

- se $\alpha > \alpha_0$ la succ. $x_n \rightarrow +\infty$
- se $\alpha = \alpha_0$ la succ. $x_n \rightarrow 1$
- se $\alpha < \alpha_0$ la succ. $x_n \rightarrow 0$

Notazione: indico con $x_n(\alpha)$ il valore di x_n ottenuto quando si parte con $x_1 = \alpha$

$$x_1(\alpha) = \alpha, \quad x_2(\alpha) = \alpha(\alpha+1), \quad x_3(\alpha) = x_2(\alpha) \left(x_2(\alpha) + \frac{1}{2} \right) \\ = \alpha(\alpha+1) \left[\alpha(\alpha+1) + \frac{1}{2} \right]$$

e così via,

FATTO 1 Per ogni $n \geq 1$, la funzione $x_n(\alpha)$ è una funzione continua e strettamente crescente di α

Dim. $x_1(\alpha) = \alpha$ è continua e strett. cresc.

$x_{n+1}(\alpha) = x_n(\alpha) \left(x_n(\alpha) + \frac{1}{n} \right)$ è continua perché prodotto di funzioni continue ed è strett. crescente perché

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow x_n(\alpha_1) > x_n(\alpha_2) \Rightarrow x_n(\alpha_1) \left(x_n(\alpha_1) + \frac{1}{n} \right) > \text{stessa cosa con } \alpha_2$$

↑
ipotesi
induttiva

FATTO 2 Esistono dei valori $\alpha > 0$ tali che $x_n(\alpha) \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$

Dim. Basta partire con $\alpha > 1$. Allora per induzione si dim. che x_n è crescente

$$\dots x_{n+1} = x_n^2 + x_n \frac{1}{n} \geq x_n^2 \geq x_n \quad (\text{se } x_n \geq 1)$$

Essendo crescente ha limite in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Se fosse $l \in \mathbb{R}$ dovrebbe essere $l = 0$ oppure 1 e non è possibile perché $x_0 > 1$ e poi è crescente.

FATTO 2 BIS Se $\exists m_0 \geq 1$ tale che $x_{m_0} > 1$, allora da lì in poi è crescente e tende a $+\infty$.

(Stessa dim. di sopra)

FATTO 3 L'insieme degli α per cui $x_n \rightarrow +\infty$ è una semiretta aperta (senza l'estremo)

Dim. Segue dal 2 bis. Che è una semiretta è quasi ovvio per via della monotonia di $x_n(\alpha)$.

Preso $\alpha_2 > \alpha_1$, abbiamo $x_n(\alpha_2) \geq x_n(\alpha_1)$ per ogni $n \geq 1$.

Quindi se $x_n(\alpha_1) \rightarrow +\infty$, a maggior ragione ci tende $x_n(\alpha_2)$.

Devo dimostrare che è aperta. Cosa vuol dire? Vuol dire che se per un certo $\alpha_0 > 0$ si ha che $x_n \rightarrow +\infty$, allora lo stesso vale anche per qualche valore $\alpha_1 < \alpha_0$.

Visto che $x_n(\alpha_0) \rightarrow +\infty$, esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{m_0}(\alpha_0) > 1$

Ma poiché la funzione $x_{n_0}(\alpha)$ è continua, avremo che

$$x_{n_0}(\alpha) > 1$$

anche in tutto un intorno di α_0



$\alpha_0 - \epsilon \quad \alpha_0 \quad \alpha_0 + \epsilon$

FATTO 4 Se per un certo $n \geq 1$ si ha che

$$x_{n+1} < x_n$$

allora da lì in poi x_n è decrescente

Dim. Supponiamo che $x_{n_0+1} < x_{n_0}$. Allora $x_{n+1} < x_n$ per ogni $n \geq n_0$

Si dim. per induzione. P.B. $n = n_0$ è banale

P.I. Se per ipotesi $x_{n+1} < x_n$, allora

$$x_{n+2} = x_{n+1} \left(x_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \leq x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right) = x_{n+1}$$

$\leq x_n \leq x_n \leq \frac{1}{n}$

cioè la tesi induttiva.

FATTO 5 Esistono degli α per cui $x_n \rightarrow 0$ e tali α sono un intervallo aperto.

per questi
 α si ha $x_n \rightarrow 0$

per questi α
si ha $x_n \rightarrow +\infty$

Dim. Esistono degli per cui

$$x_3(\alpha) < x_2(\alpha), \text{ cioè}$$

$$\alpha(\alpha+1) \left[\alpha(\alpha+1) + \frac{1}{2} \right] < \alpha(\alpha+1)$$

cioè $\alpha(\alpha+1) + \frac{1}{2} < 1$ e basta prendere α piccolo perché sia vero.

A quel p.to x_n è decrescente, quindi ha limite, dunque il

Limite è 0 (può essere solo 0 o 1, ma da x_2 in poi è decrescente e $x_2 < 1$ se α è piccolo).

FATTO 6 Dimostro che se per α_0 si ha che $x_n \rightarrow 0$, allora lo stesso vale per gli α vicini.

Dim. Visto che $x_n(\alpha_0) \rightarrow 0$, allora esiste n_0 t.c.

$$x_{n+1}(\alpha_0) < x_{n_0}(\alpha_0) < 1$$

Ma allora la stessa relazione vale per gli α vicini ad α_0 , e quindi per gli stessi α vicini è costretta a tendere a 0.

FATTO 7 Cosa succede per gli α

~~semplici~~ ~~complicati~~

"in mezzo", ad esempio sup verde oppure inf rosso?

Non può tendere a 0 e non può tendere a $+\infty$.

Non può esistere n_0 t.c. $x_{n_0+1} < x_{n_0}$, perché allora da lì in poi sarebbe decrescente e quindi tenderebbe a 0.

Quindi $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi esiste il limite e l'unico limite disponibile è 1.

FATTO 8 Sup verde = inf rosso, cioè esiste un unico valore α_0 t.c. $x_n \rightarrow 1$.

Dim. Supponiamo ce ne siano 2: α_1 e α_2 .

wlog supponiamo $\alpha_1 < \alpha_2$.

Sia y_n la successione che parte da α_1

Sia z_n la successione che parte da α_2

Considero $u_n = z_n - y_n$.

Allora

$$d_{n+1} = z_{n+1} - y_{n+1} = z_n^2 + \frac{1}{n} z_n - y_n^2 - \frac{1}{n} y_n$$

$$= (z_n + y_n)(z_n - y_n) + \frac{1}{n} (z_n - y_n)$$

$$= (z_n + y_n + \frac{1}{n}) (z_n - y_n)$$

$$= \underbrace{(z_n + y_n + \frac{1}{n})}_{\geq 2} d_n$$

$d_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (banale induzione). Inoltre

$$d_{n+1} \geq \frac{3}{2} d_n$$

da un certo pto in poi

e questo impedisce a d_n di tendere a 0, cosa che dovrebbe fare in quanto

$$d_n = z_n - y_n \rightarrow 1 - 1 = 0$$

— 0 — 0 —

PIANO GENERALE

- ① Se supera 1 tende a $+\infty$. I dati iniziali per cui prima o poi supera 1 sono una semiretta aperta.
 - ② Se ad un certo pto $x_{n+1} < x_n$ (≤ 1), allora da lì in poi è decrescente e tende a 0. I dati per cui succede sono un intervallo aperto.
 - ③ Resta almeno un dato in mezzo: per quel valore non supera 1 ed è debolmente crescente, dunque ha limite e l'unico limite a disposizione è 1.
 - ④ In mezzo c'è un solo dato: supponendo che ce ne siano 2 si trova un assurdo.
- 0 — 0 —