

Successioni per ricorrenza non autonome

$$x_{n+1} = f(x_n, n) \leftarrow \text{La regola di passaggio cambia ogni volta.}$$

L'unica regola è che non ci sono regole!

Esempio 1

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{n+3}}$$

$$x_0 = 2015$$

$$x_1 \stackrel{n=0}{=} \frac{x_0}{\sqrt{3}} = \frac{2015}{\sqrt{3}}$$

1° modo Piano classico con monotonia

$$(i) \quad x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(banale inclusione)

$$(ii) \quad x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

((i) + (ii) + teo. succ. monotone)

$$(iv) \quad l = 0$$

Dim. (ii) Ricorrenza + disuguaglianza

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow \frac{x_n}{\sqrt{n+3}} \leq x_n \Leftrightarrow x_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right) \geq 0$$

$\uparrow$ ≥ 0 per (i) $\uparrow$ ≥ 0 , quindi ok

Dim. (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{n+3}}$$

$\downarrow$ l $\downarrow$ 0

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{n+3}}$$

$\downarrow$ l $\downarrow$ l

NO! LIMITE
METÀ PER
VOLTA

Ho usato il fatto che so già
che $l \in \mathbb{R}$.

2° modo

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{n+3}}$$

$$x_0 = 2015$$

PIANO

(i) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(banale induzione)

(ii) $x_n \rightarrow 0$

Dim (ii)

Applico il rapporto (posso per (i))

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \rightarrow 0, \text{ quindi } x_n \rightarrow 0$$

3° modo

Piano di limitatezza + carabinieri

(i) $0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Facile induzione)

(ii) $x_n \rightarrow 0$

Dim (i)

$x_n \geq 0$ è banale

$x_n \leq 10.000$ Passo base: $2015 \leq 10.000$

Passo induttivo Ipotesi: $x_n \leq 10.000$ Tesi: $x_{n+1} \leq 10.000$

Dim: $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{3}} \leq 10.000$

Dim. (ii)

Dalla (i) ottengo che (dividendo per $\sqrt{n+3}$)

$$0 \leq \frac{x_n}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{n+3}}, \text{ cioè } \begin{array}{ccc} \textcircled{0} & \leq & \textcircled{x_{n+1}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{n+3}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Oss finale: se $x_{n+1} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche $x_n \rightarrow l$ (stesso).

Achtung!

$$x_n \rightarrow 8 \Rightarrow x_{2n} \rightarrow 8$$

↑
non viceversa

$$x_{n+5} \rightarrow 8 \Leftrightarrow x_n \rightarrow 8$$

↑ sottosucc. FINITA

Esempio 2

$$x_{n+1} = \frac{\arctan(\sin x_n)}{n}$$

$$x_1 = 2015$$

PIANO:

$$0 \leq x_{n+1} \leq \frac{37}{n}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Se $x_{n+1} \rightarrow 0$, anche $x_n \rightarrow 0$

Esempio 3

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 5}{n}$$

$$x_1 = 2015$$

Il piano con la monotonia rischia di essere complicato

$$x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{2x_n + 5}{n} \leq x_n \iff 2x_n + 5 \leq n x_n$$

$$\iff x_n \geq \frac{5}{n-2}$$

↑ mi servirebbe in un pto (i)

PIANO

$$(i) \quad 0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \geq 1$$

$$(ii) \quad x_n \rightarrow 0$$

Dim (ii)

Da (i) segue che
e da qui si chiude

$$\frac{5}{n} \leq x_{n+1} \leq \frac{20.005}{n}$$

Dim (i)

$x_n \geq 0$ davvero banale

$$x_n \leq 10.000 \quad \text{P.B.} \quad \text{P.I.} \quad \text{Ipotesi} \quad x_n \leq 10.000$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 5}{n} \leq \frac{20.005}{n} \leq 10.000$$

↑
ok solo per $n \geq 3$

Devo fare a MANO i passi base $n = 1, 2, 3$ (in realtà basta 3)

— 0 — 0 —

Esempio 4 $x_{n+1} = \sqrt[n]{1+x_n}$ $x_1 = 2015$

- PIANO**
- (i) $1 \leq x_n \leq 10.000$
 - (ii) $x_n \rightarrow 1$

Dim (ii)

$$1 \leq x_{n+1} \leq \sqrt[n]{10.001}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

Dim (i) Induzione ... $x_{n+1} = \sqrt[n]{1+x_n} \leq \sqrt[n]{10.001} \leq 10.000$

↑
ok per $n \geq 2$

Quindi bisogna fare $n=1$ e $n=2$ a mano.

Esempio 5 $x_{n+1} = \sqrt[n]{n+x_n}$ $x_1 = 2015$

Posso provare come prima (i) $1 \leq x_n \leq 10.000$

... $x_{n+1} \leq \sqrt[n]{n+10.000} \stackrel{?}{\leq} 10.000$

$$\Leftrightarrow (n+10.000) \leq 10.000^n$$

Alternativa: essere meno tirdi in fare (i)

(i') $1 \leq x_n \leq 10.000 (n+1)$

... $x_{n+1} \leq \sqrt[n]{\underbrace{n+10.000 \quad n+10.000}_{\leq 10.000 (n+2)}} \leq 10.000 (n+2)$

$$(10.001 n + 10) \leq (10.000 n + 20.000)^n$$

davvero abbondante

Esempio 6 $x_{n+1} = 7 + \frac{n^{10}}{2^n} x_n$ $x_1 = 2015$

Questa va in overflow dopo 2 o 3 passaggi ... e i fatti tielo a 7.

$$\frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$
$$(i) \quad 0 \leq x_n \leq x_{n_0} + 14$$
$$\forall n \geq n_0$$

(ii) $x_m \rightarrow 7$

$$\boxed{7} \leq x_{u1} \leq \boxed{7 + \frac{3^6}{2^3} - (x_{u0} + 14)}$$

P.B. Baule

P.I. Ipotesi: $x_n \leq x_{n_0} + 14$

Tesi: $x_{n+1} \leq x_n + 14$

Dim $x_{m+1} = 7 + \frac{3^{10}}{2^3} x_m \leq 7 + \frac{3^{10}}{2^3} (x_{u0} + 14)$

$$\leq x + \frac{1}{2}(x_{u0} + 14) \stackrel{?}{\leq} x_{u0} + 14$$

$$\text{vero} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{2} x_{m_0} \leq x_{u_0}$$

vero perché $x_{10} \geq 0$.

1 0 1 6 1