

Ritorno al passato : metodo del polinomio per la formula esplicita per

$$a_{n+2} = a a_{n+1} + b a_n$$

Idea: penso come incognita la coppia (a_n, a_{n+1}) , anzi il polinomio

$$p_n(x) = b a_n + a_{n+1} x$$

Infatti ragionando modulo $x^2 - ax - b$ (quindi $x^2 \equiv ax + b$)

$$x p_n(x) = b a_n x + a_{n+1} x^2 \equiv b a_n x + a_{n+1} \cdot ax + a_{n+1} \cdot b$$

$$= b a_{n+1} + \underbrace{(b a_n + a a_{n+1})}_{a_{n+2}} x = b a_{n+1} + a_{n+2} x = p_{n+1}(x)$$

Morale: $p_{n+1}(x) \equiv x p_n(x) \pmod{x^2 - ax - b}$ e quindi per induzione

$$p_n(x) \equiv x^n p_0(x) \pmod{x^2 - ax - b}$$

cioè

$$p_n(x) = x^n p_0(x) + q_n(x) (x^2 - ax - b) \quad (*)$$

Come calcolo $p_n(x)$? Se $\mu \neq \lambda$ sono le radici del pol. caratter. sostituisco

$$x = \lambda \rightsquigarrow \underbrace{b a_n + a_{n+1} \lambda}_{p_n(\lambda)} = \lambda^n \underbrace{(b a_0 + a_1 \lambda)}_{p_0(\lambda)}$$

$$x = \mu \rightsquigarrow b a_n + a_{n+1} \mu = \mu^n (b a_0 + a_1 \mu)$$

sistema nelle incognite a_n e a_{n+1} con $\det \neq 0$
 $\rightsquigarrow$ trovo a_n e a_{n+1}

Se invece λ è radice unica di mult. 2, allora $x = \lambda$ come prima, poi derivando la (*) otteniamo

$$a_{n+1} = n x^{n-1} p_0(x) + x^n p_0'(x) + q_n'(x) (x^2 - ax - b) + q_n(x) (2x - a)$$

$\uparrow$
 $[p_n(x)]'$

Sostituendo $x = \lambda$ si ha la formula per a_{n+1}

— 0 — 0 —

SUCCESIONI PER RICORRENZA NON LINEARI

Caso autonomo : $x_{n+1} = f(x_n)$

Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow$ Volendo si potrebbe ottenere una formula esplicita (esercizio!)

Domande: trovare il limite e "il comportamento" senza usare la formula esplicita

PIANO

- (i) $0 \leq x_n \leq \frac{3}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- (ii) $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv) $l = 0$

] Piano standard con la monotonia

Ora dovrei dim. (i), (ii), (iii), (iv) nell'ordine, usando ogni volta solo le cose precedentemente dimostrate.

Dim (iii) Dati per buoni (i) e (ii), segue dal te. succ. monotone (deb. decrescente + limitata dal basso $\Rightarrow$ esiste limite in $\mathbb{R}$)

Dim (iv) Sapendo già che $x_n \rightarrow l$, passo al limite nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 \end{array} \quad \leadsto \quad l = \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}$$

Ma $l = 1$ è incompatibile con (i), quindi per forza $l = 0$.

Oss. Se al p.to (i) ci fosse stato $0 \leq x_n < 1$, questo non bastava per escludere $l = 1$ (le disuguaglianze strette non passano al limite)

$\uparrow$ pensare a $\frac{1}{n} > 0$, ma $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

Dim (ii)

Riconvergenza + disuguaglianza

precorso

$$x_{n+1} \stackrel{?}{\leq} x_n \rightsquigarrow x_n^2 \leq x_n \quad \text{questa è vera} \Leftrightarrow x_n \in [0,1]$$

$\uparrow$
riconvergenza

Per il p.to (i) so già che $x_n \in [0, \frac{3}{4}]$, quindi a maggior ragione $x_n \in [0,1]$

Dim (i) Induzione : ovvio per $n=0$

P.I. Ipotesi : $0 \leq x_n \leq \frac{3}{4}$ Tesi : $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{3}{4}$

Dim. prendo l'ipotesi e faccio il quadrato (senza cambiare i versi perché $f(x) = x^2$ è strett. cresc. nella zona in questione)

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leq & x_n^2 \leq \frac{9}{16} \\ \parallel & & \downarrow \\ 0 & \leq & x_{n+1} \leq \frac{9}{16} \leq \frac{3}{4} \end{array} \quad \text{quindi ok.}$$

— 0 — 0 —

Dim. alternativa della monotonia:

Induzione + applico f

Dimostro che $x_{n+1} \leq x_n$ per induzione

Passo base: $x_1 \leq x_0$ sì perché $\frac{9}{16} \leq \frac{3}{4}$

Passo induttivo : Ipotesi : $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico $f(x) = x^2$. Essendo tutto per $x \geq 0$ (grazie al p.to (i)) posso conservare i versi

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} \leq x_n & \Rightarrow & x_{n+1}^2 \leq x_n^2 \\ & & \parallel \\ & & x_{n+2} \leq x_{n+1}, \text{ cioè la tesi} \end{array}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 3, x_1 = 9, x_2 = 81, x_3 = 81^2 \dots$$

PIANO

(i) $x_n \geq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $l = +\infty$

Dim (i)

Inclusione (applicando $f(x) = x^2$)

Dim (ii)

1° modo: ricorrenza più disuguaglianze

$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow x_n^2 \geq x_n \Leftrightarrow x_n \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$\uparrow$ ricorrenza $\uparrow$ percorso: valori estremi

Sapendo che $x_n \geq 3$ dal p.to (i), automaticamente $x_{n+1} \geq x_n$

2° modo: inclusione + applico $f(x) = x^2$

Passo base: $x_1 \geq x_0$ ok perché $9 \geq 3$

Passo induttivo: ipotesi $x_{n+1} \geq x_n$, applico ripetutamente $f(x) = x^2$ (dopo aver spiegato perché posso) e ottengo

$$x_{n+1}^2 \geq x_n^2, \text{ cioè } x_{n+2} \geq x_{n+1} \text{ che è la tesi}$$

Dim (iii)

(ii) + teo. succ. monotone (ora non ho limitazione dall'alto, quindi il limite può essere in $\mathbb{R}$ o $+\infty$)

Dim (iv)

Se per assurdo fosse $l \in \mathbb{R}$, potrei passare al limite nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 \end{array}$$

$$l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entrambi incompatibili con (i), quindi resta solo $l = +\infty$

Esempio 3

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \\ x_0 = 2015 \end{cases}$$

PIANO

(i) $4 \leq x_n \leq 2015$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monot.)

(iv) $l = 4$

Dim. (iv) Passo al limite nella ricorrenza (posso per (iii))

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$l = \sqrt{3l + 4}$$

$$\leadsto \text{risolvo } l^2 = 3l + 4 \leadsto l = \frac{1}{2} \left(4 \pm \sqrt{4^2 + 4} \right)$$

$\swarrow$
 -1

quindi per forza $l = 4$.

Non accettabile come solus. dell' eq.

Dim di (i) Induzione $n=0$ OK

Pass. induttivo

$4 \leq x_n \leq 2015$ per ipotesi. Applico $f(x) = \sqrt{3x+4}$ che è una funzione crescente e ottengo

$$f(4) \leq f(x_n) \leq f(2015)$$

"

"

$$4 \leq x_{n+1} \leq \sqrt{6049} \leq 2015 \text{ che è la tesi}$$

Dim (ii) Modo più veloce: induzione + applico $f(x)$ che è crescente nella zona in questione.