

Ancora succ. per ricorrenza lineari

Sistema
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n - 5b_n \end{cases}$$

Shifto da 1^a di 1:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} + b_{n+1} && (b_{n+1} \text{ dalla 2^a}) \\ &= 3a_{n+1} + 2a_n - 5b_n && (b_n \text{ dalla 1^a}) \\ &= 3a_{n+1} + 2a_n + 15a_n - 5a_{n+1} \\ &= -2a_{n+1} + 17a_n \end{aligned}$$

e da qui è fatta.

Teoria generale

Sia V lo spazio vettoriale delle successioni di numeri reali. Considero la funzione

$$L: V \rightarrow V$$

definita così

$$L(\{x_n\}) = \{x_{n+2} - ax_{n+1} - bx_n\}$$

Allora x_n verifica la ricorrenza $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ se e solo se $\{x_n\} \in \ker L$ (L è ovviamente lineare).

Quindi l'insieme delle succ. che verificano la ricorrenza è uno spazio vettoriale e ha dimensione 2 (basta fissare 2 dati iniziali).

Se l'ordine è k la dim. è k .

— o — o —

Caso non omogeneo

Esempio $x_{n+1} = ax_n + b$ ← non omogeneo

1° metodo: bootstrapping

$$x_1 = ax_0 + b$$

$$x_2 = ax_1 + b = a^2x_0 + ab + b$$

$$x_3 = ax_2 + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b$$

Congettura

$$x_n = a^n x_0 + b(1 + a + \dots + a^{n-1}) = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Formula generale

$$x_n = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

per $a \neq 1$, ma se $a=1$ è proprio banale

Dim. 1 Induzione formale sulla formula congetturata.

2° metodo, più elegante

Cambio variabile da x_n a y_n

$$y_n = x_n - l$$

Cosa risolve y_n ?

$$y_{n+1} = x_{n+1} - l$$

$$= ax_n + b - l$$

($x_n = y_n + l$)

$$= ay_n + al + b - l$$

cioè

$$y_{n+1} = ay_n + al + b - l$$

ci auguro che sia 0: $l = \frac{b}{1-a}$

$$y_{n+1} = ay_n \leadsto y_n = a^n y_0 = a^n (x_0 - l)$$

↓
 $x_n - l$

$x_n - l = a^n (x_0 - l) \leadsto$ sostituendo il valore di l trovo la stessa formula di prima.

3° metodo Dalla teoria generale delle equ. lineari non omogenee mi aspetto una formula del tipo

$$x_n = y_n + z_n$$

$\uparrow$ sol. gen. omogenea
 $\downarrow$ $x_{n+1} = ax_n$
 $\downarrow$ ca^n

$\uparrow$ soluzione speciale della non omogenea

La soluzione z_n speciale basta cercarla costante

$$x_{n+1} = ax_n + b \quad \text{cerco una costante } l \text{ tale che}$$

$$l = al + b \quad \leadsto l = \frac{b}{1-a}$$

$\Rightarrow$ soluzione generale

$$x_n = \underbrace{c \cdot a^n}_{y_n} + \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{z_n}$$

Se impongo $x_0 = c + \frac{b}{1-a}$ trovo c e viene la solita formula di prima.

Esempio 2 $x_{n+1} = 2x_n + n^2 + 3^n$

Stile 3° metodo, la soluzione sarà del tipo $x_n = c \cdot 2^n + z_n$

$\uparrow$ sol. speciale

Cerco z_n del tipo $z_n = an^2 + bu + c + d \cdot 3^n$. Sostituisco

$$\underbrace{a(n+1)^2}_{\text{green}} + \underbrace{b(n+1)}_{\text{orange}} + \underbrace{c}_{\text{orange}} + \underbrace{d \cdot 3^{n+1}}_{\text{blue}} = \underbrace{2an^2 + 2bu + 2c}_{\text{green}} + \underbrace{2d \cdot 3^n}_{\text{blue}} + \underbrace{n^2}_{\text{green}} + \underbrace{3^n}_{\text{blue}}$$

$$3d = 2d + 1$$

$$a + b + c = 2c$$

$$2a + b = 2b$$

$$a = 2a + 1$$

termine noto

coeff. di n

coeff. di n^2

Risolvendo trovo

a, b, c, d .

Esempio 3

$$x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 3^n$$

Parte omogenea: $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n \rightsquigarrow x^2 - 7x + 12 = 0$
 $\rightsquigarrow x = 3 \text{ e } x = 4$

$C_1 3^n + C_2 4^n$

 Soluzione generale omogenea

La soluzione speciale non posso cercarla del tipo $z_n = a \cdot 3^n$ perché 3^n risolve già l'omogenea.

Quindi la cerco del tipo

$$z_n = a \cdot n 3^n$$

$$a(n+2)3^{n+2} = 7a(n+1)3^{n+1} - 12an3^n + 3^n \cdot 1$$

$$9an + 18a = 21an + 21a - 12an + 1 \rightsquigarrow 3a = -1$$
$$\rightsquigarrow a = -\frac{1}{3}$$

Quindi la soluzione generale è $x_n = C_1 3^n + C_2 4^n - \frac{1}{3} n 3^n$

— o — o —

Oss. Le radici del pol. caratteristico possono venire numeri complessi. Allora ci sono 2 opzioni

1 - tenerseli, ma consapevoli che se i se ne devono andare se tutti i coeff. e i dati iniziali sono reali

2 - posto $\lambda = \rho e^{i\theta}$ $\mu = \rho e^{-i\theta}$, allora invece di usare come base λ^n e μ^n posso usare

$$\rho^n \cos(n\theta)$$

$$\rho^n \sin(n\theta)$$

— o — o —